# Offene und abgeschl. Teilmengen eines metrischen Raums

**Definition (3.1)**

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum.

(i) Eine Teilmenge $U \subseteq X$ wird offen genannt, wenn für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ gilt.

(ii) Man bezeichnet eine Teilmenge $A \subseteq X$ als abgeschlossen, wenn das Komplement $X \setminus A$ von $A$ in $X$ offen ist.

... $B_r(x)$ eine offene Teilmenge von $(X,d)$ ist.

Beispiele für offene bzw. abg. Teilmengen metrischer Räume

- metrischer Raum $(\mathbb{R}, d)$, $d(a,b) = |a-b| \; \forall a, b \in \mathbb{R}$
  Dann ist jedes offene Intervall $]a,b[$ offen in $(\mathbb{R}, d)$ und jedes abg. Intervall $[a,b]$ abgeschlossen in $(\mathbb{R}, d)$ (für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$)
- Halboffene Intervalle $]a,b]$ oder $[a,b[$ sind weder offen noch abgeschlossen.

$(\mathbb{R}, d)$ (für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$)

- Halboffene Intervalle $]a, b]$ oder $[a, b[$ sind

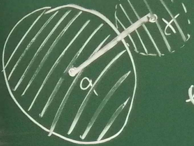
- Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, $a \in X$, $r \in \mathbb{R}^+$. Dann ist $B_r(a)$ offen in $(X, d)$.

Sei $x \in B_r(a)$. z. zg.: $\exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq B_r(a)$.

Sei $\varepsilon = r - d(a, x)^{(*)}$. Beh: $B_\varepsilon(x) \subseteq B_r(a)$

Sei $y \in B_\varepsilon(x) \Rightarrow d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow d(a, y) \leq$
$d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + \varepsilon = d(a, x) + r - d(a, x) = r$
$\Rightarrow y \in B_r(a)$

- Jede abgeschlossene Kreisscheibe $\bar{B}_r(a)$ ist abgeschlossen in $(X, d)$ denn: Zeige, dass $U = X \setminus \bar{B}_r(a)$ eine offene Teilmenge von $(X, d)$ ist.




Sei $x \in U$. z.zg.: Es gibt ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$.

Sei $\varepsilon = d(a,x) - r$. Wegen $x \notin \bar{B}_r(a)$ gilt $d(a,x) > r$ und somit $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

Beh.: $B_\varepsilon(x) \subseteq U$, äquivalent dazu:

$B_\varepsilon(x) \cap \bar{B}_r(a) = \emptyset$

Ang. $y \in B_\varepsilon(x) \cap \bar{B}_r(a)$.

$y \in B_\varepsilon(x) \Rightarrow d(x,y) < \varepsilon$

$y \in \bar{B}_r(a) \Rightarrow d(a,y) \leq r$

$\Rightarrow d(a,x) \leq d(a,y) + d(y,x) =$

$d(a,y) + d(x,y) < r + \varepsilon = r + (d(a,x) - r)$

$d(a,x) \Rightarrow d(a,x) < d(a,x)$ ↯


$B_r(a) \cup \{s\}$, wobei $s \in X$ mit $d(a,s) = r$ ist weder offen noch abgeschlossen, wenn es einen weiteren Punkt $t \in X$ mit $d(a,t) = r$ gibt.

- Ist $X$ eine Menge und $d_X$ die diskrete Metrik auf $X$, dann ist <u>jede</u> Teilmenge von $X$ offen und abgeschlossen.

# Offenheit in normierten $\mathbb{R}$-Vektorräumen

**Proposition (3.2)**

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\|\cdot\|'$ eine zu $\|\cdot\|$ äquivalente Norm. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ ist genau dann offen bezüglich der Norm $\|\cdot\|$, wenn sie bezüglich der Norm $\|\cdot\|'$ offen ist.

**Erinnerung**: Eine Familie $(X_i)_{i\in I}$ hier Menge von Teilmengen einer Menge $X$ mit Indexmenge $I$ ist eine Abb. $I \to \mathcal{P}(X)$ (Potenzmenge von $X$)

**Bsp.**: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $X_n = [n, n+1[ \ \forall n\in\mathbb{N}$

Erinnerung: $\bigcup_{i\in I} X_i = \{x\in X \mid \exists i\in I \text{ mit } x\in X_i\}$

**Bsp**: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [n, n+1[ \ = [1, +\infty[$

# Definition der topologischen Räume

**Definition (3.3)**

Sei $X$ eine Menge und $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{P}(X)$. Man bezeichnet $\mathscr{T}$ als Topologie auf $X$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Es gilt $\varnothing \in \mathscr{T}$ und $X \in \mathscr{T}$.

(ii) Für alle $U, V \in \mathscr{T}$ gilt $U \cap V \in \mathscr{T}$.

(iii) Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von $X$, wobei $U_i \in \mathscr{T}$ für jedes $i \in I$ gilt, dann ist auch die Vereinigung $\bigcup_{i \in I} U_i$ ein Element von $\mathscr{T}$.

Ein Paar $(X, \mathscr{T})$ bestehend aus einer Menge $X$ und einer Topologie $\mathscr{T}$ auf $X$ bezeichnet man als topologischen Raum. Die Elemente von $\mathscr{T}$ werden auch als offene Teilmengen des topologischen Raums bezeichnet.

# Metrische Räume als topologische Räume

**Satz (3.4)**

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $\mathscr{T}$ die Menge der in $(X, d)$ offenen Teilmengen. Dann ist $\mathscr{T}$ eine Topologie auf $X$.

Teilmengen einer Menge $X$ mit Indexmenge $I$ ist eine Abb. $I \to \mathcal{P}(X)$ (Potenzmenge von $X$)

Beweis von Satz 3.4:

geg metrischer Raum $(X, d)$

Sei $\mathcal{T} = \{ U \subseteq X \mid \forall x \in U \ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : B_\varepsilon(x) \subseteq U \}$.

zu überprüfen: (i) $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$

(ii) $\forall U, V \in \mathcal{T} : U \cap V \in \mathcal{T}$

(iii) Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von $X$ mit $U_i \in \mathcal{T} \ \forall i \in I$, dann gilt $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

zu (i) Die Aussage $\forall x \in \underline{\underline{\emptyset}} : \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : B_\varepsilon(x) \subseteq \emptyset$ ist wahr

$\Rightarrow \emptyset$ ist offen in $(X, d)$

Für jede $x \in X$ und jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gilt $B_\varepsilon(x) \subseteq X$

$\Rightarrow X$ ist offen in $(X, d)$ insg.: $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

<u>zu (ii)</u> Seien $U, V \in \mathcal{J}$, also $U, V$ offen in $(X, d)$. z.zg.: $U \cap V$ ist offen in $(X, d)$

Sei $x \in U \cap V$. z.zg.: $\exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U \cap V$

$x \in U$, $U$ ist offen $\Rightarrow \exists\, \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ mit $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq U$

$x \in V$, $V$ ist offen $\Rightarrow \exists\, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq V$

Sei $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$

$\varepsilon \leq \varepsilon_1 \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq U$

$\varepsilon \leq \varepsilon_2 \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq V$

insgesamt: $B_\varepsilon(x) \subseteq U \cap V$

Sei $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$

r)

X

ffen

S

mit

e Me-

ge von X

zu (iii) Sei $(U_i)_{i \in I}$ vorgeg., mit $U_i \in \mathcal{T}$ $\forall i \in I$

und $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ z.zg.: $U \in \mathcal{T}$

Sei $x \in U$. z.zg.: $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$

$x \in U \rightarrow \exists i \in I$ mit $x \in U_i$. $U_i$ ist offen $\Rightarrow$

$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U_i \overset{U_i \subseteq U}{\Longrightarrow} B_\varepsilon(x) \subseteq U$

Beispiele für topologische Räume, die nicht durch eine Metrik gegeben sind.

(i) $X$ bel. Menge $|X| \geq 2$, $J = \{\emptyset, X\}$

„triviale Topologie" „Klumpentopologie"

„chaotische Top."

(Diese Topologie ist auch im Fall $|X| \leq 1$ definiert, kommt aber durch eine Metrik zu Stande).

(ii) $X = [1,2] \cup [3,4] \subseteq \mathbb{R}$ 

$J = \{\emptyset, [1,2], [3,4], X\}$

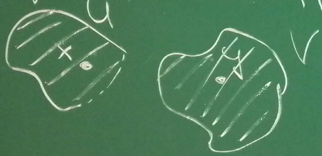
(Diese Topologie ist auch im Fall $|X| = 1$ definiert,
kommt aber durch eine Metrik zu Stande).

(ii) $X = [1,2] \cup [3,4] \subseteq \mathbb{R}$

(iii) $X$ beliebige unendliche Menge

$$\mathcal{T} = \{ U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ ist endlich} \} \cup \{\emptyset\}$$

Eigenschaft „hausdorffsch":

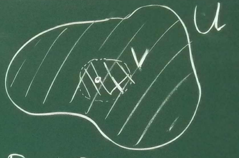


# Der Umgebungsbegriff

**Definition (3.5)**

Sei $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ wird Umgebung von $x$ genannt, wenn eine offene Teilmenge $V$ von $X$ mit $x \in V$ und $V \subseteq U$ existiert.

**Bem:** Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum und $x \in X$, $U \subseteq X$. Dann gilt




$U$ ist Umgebung von $x$ $\Longleftrightarrow$ $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$

„$\Longleftarrow$" klar, weil $V = B_\varepsilon(x)$ eine offene Teilmenge von $X$ mit $V \subseteq U$ und $x \in B_\varepsilon(x)$ ist

„$\Longrightarrow$" Vor.: $U$ ist Umgebung von $x$

$\Rightarrow \exists V \subseteq X$, $V$ offen in $(X,d)$ mit $x \in V$ und $V \subseteq U$

$V$ offen $\Rightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq V \overset{V \subseteq U}{\Rightarrow} B_\varepsilon(x) \subseteq U$

# Hausdorffsche topologische Räume

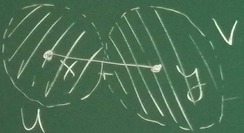
**Definition (3.6)**

Ein topologischer Raum $(X, \mathscr{T})$ wird hausdorffsch genannt, wenn für zwei beliebige verschiedene Punkte $x, y \in X$ jeweils Umgebungen $U$ von $x$ und $V$ von $y$ mit $U \cap V = \varnothing$ existieren.

$\Rightarrow \exists V \subseteq X$, $V$ offen in $(X,d)$ mit $x \in V$ und $V \subseteq U$

$V$ offen $\Rightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq V \overset{V \subseteq U}{\Rightarrow} B_\varepsilon(x) \subseteq U$

<u>Bem</u>.: Ist $(X,d)$ ein metrischer Raum und $\mathcal{T}$ die Topologie gegeben durch die in $(X,d)$ offenen Mengen, dann ist $(X,\mathcal{T})$ ein hausdorffscher top. Raum.




Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$.

Dann liegt $r = d(x,y) \in \mathbb{R}^+$.

Setze $U = B_{r/2}(x)$, $V = B_{r/2}(y)$.

Beh.: $U \cap V = \emptyset$ Ang. $z \in U \cap V$

$z \in U \Rightarrow d(x,z) < \frac{1}{2} r$ $z \in V \Rightarrow d(y,z) < \frac{1}{2} r$

$\Rightarrow r = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \frac{1}{2} r + \frac{1}{2} r = r$ ↯

# Konvergenz in topologischen Räumen

**Definition (3.7)**

Sei $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum, $a \in X$ und $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $X$. Wir sagen, die Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen den Punkt $a$ und bezeichnen $a$ als Grenzwert der Folge, wenn für jede Umgebung $U$ von $x$ in $(X, \mathscr{T})$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x^{(n)} \in U$ für alle $n \geq N$ erfüllt ist.

**Proposition (3.8)**

Ist $(X, \mathscr{T})$ ein hausdorffscher topologischer Raum, dann besitzt jede Folge in $X$ höchstens einen Grenzwert.

# Abgeschlossener Mengen und Grenzwerte

**Satz (3.9)**

Sei $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$.

(i) Ist $A$ abgeschlossen und $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $A$, die in $X$ einen Grenzwert $x$ besitzt, dann gilt $x \in A$.

(ii) Ist die Topologie $\mathscr{T}$ durch eine Metrik $d$ definiert, dann gilt auch die Umkehrung: Liegt der Grenzwert jeder in $A$ enthaltenen, in $X$ konvergenten Folge in $A$, dann ist $A$ eine abgeschlossene Teilmenge von $X$.

**Def.** Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

$A \subseteq X$ ist **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A$ offen ist, also $X \setminus A$ in $\mathcal{T}$ liegt.

Beweis von Satz 3.9

zu (i) geg. top. Raum $(X, \mathcal{T})$, $A \subseteq X$ abgeschlossene Teilmenge, $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $A$, $x \in X$ Grenzwert der Folge

**Beh.:** $x \in A$

Beh.: $x \in A$

Ang. $x \notin A$. Betrachte $U = X \setminus A$.
A ist abgeschl. $\Rightarrow$ U ist offen, außerdem
gilt $x \in U$ $\Rightarrow$ U ist Umgebung von x.
x ist Grenzwert von $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, U ist Umgebung
$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : x^{(n)} \in U \Rightarrow$
$x^{(n)} \notin A \ \forall n \geq N$ ↯

Raum.

A

$\subseteq X$

$n \in \mathbb{N}$

der Folge

Die Aussage aus Satz 3.9 (ii) wird falsch, wenn $A \subseteq X$ nicht abg. ist.

<u>Bsp</u>: $X = \mathbb{R}$, $A = [0, 1[$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geg. durch $x_n = 1 - \frac{1}{n}$

$\Rightarrow x_n \in A \; \forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$

<u>aber</u>: $1 \notin A$