

Definition (2.1)

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ wird **stetig** in einem Punkt $a \in X$ bezüglich der Metriken d_X und d_Y genannt, wenn für jede Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ die Implikation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a \text{ in } (X, d_X) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{(n)}) = f(a) \text{ in } (Y, d_Y)$$

gilt. Wir bezeichnen f insgesamt als stetig, wenn f in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

Satz (2.15)

Eine lineare Abbildung $\phi : V \rightarrow W$ zwischen normierten $\mathbb{R}$ -Vektorräumen ist genau dann stetig, wenn eine Konstante $\gamma \in \mathbb{R}^+$ mit $\|\phi(v)\| \leq \gamma\|v\|$ für alle $v \in V$ existiert.

Beispiel für ein unstetige lineare Abbildung

Proposition (2.16)

Sei V der $\mathbb{R}$ -Vektorraum der Polynomfunktionen auf dem Intervall $[0, 1]$, ausgestattet mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_{\infty} = \sup\{ |f(x)| \mid x \in [0, 1] \}.$$

Dann ist die Ableitungsabbildung $\phi_1 : V \rightarrow V, f \mapsto f'$ **unstetig**.

Satz (2.17)

Für jedes $\phi \in \mathcal{L}(V, W)$ existiert das Supremum

$$\|\phi\| = \sup\{ \|\phi(v)\| \mid v \in V, \|v\| \leq 1 \}.$$

Durch die Zuordnung $\mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathbb{R}_+, \phi \mapsto \|\phi\|$ ist auf dem $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathcal{L}(V, W)$ eine Norm definiert, die sogenannte **Operatornorm**.

Nachtrag: Sind $(V, \|\cdot\|)$, $(W, \|\cdot\|)$ nor-

mierte $\mathbb{R}$ -Vektorräume, dann bezeichnet

$\mathcal{L}(V, W)$ den $\mathbb{R}$ -Vektorraum der stetigen linearen

Abbildungen $V \rightarrow W$. ($\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ = $\mathbb{R}$ -Vektorraum
aller linearen Abb.).

Für jedes $\phi \in \mathcal{L}(V, W)$ ist $\{\|\phi(v)\| \mid v \in V, \|v\| \leq 1\}$

eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ und somit $\|\phi\| \in \mathbb{R}$,

wegen $\|\phi(v)\| \in \mathbb{R}_+$ $\forall v \in V$ mit $\|v\| \leq 1$ sogar

$\|\phi\| \in \mathbb{R}_+$, denn:

Da ϕ stetig ist, existiert nach Satz 2.15 ein

$\gamma \in \mathbb{R}^+$ mit $\|\phi(v)\| \leq \gamma \|v\| \quad \forall v \in V$.

Sei nun $v \in V$ mit $\|v\| \leq 1$. Dann gilt

$\|\phi(v)\| \leq \gamma \|v\| \leq \gamma$, also ist γ eine obere
Schranke der Menge $\{\|\phi(v)\| \mid v \in V, \|v\| \leq 1\}$.

B

$\|\phi(v)\|$

$\|\phi(v)\|$

$$\Rightarrow \phi(v) = \phi\left(\|v\| \cdot \frac{1}{\|v\|} \cdot v\right) = \|v\| \cdot \phi\left(\frac{1}{\|v\|} \cdot v\right) = \|v\| \cdot 0_W = 0_W$$

Beweis von Satz 2.17

geg: $\mathbb{R}$ -Vektorräume V, W stetigen!

$\mathcal{L}(V, W) = \mathbb{R}$ -Vektorraum der linearen Abb. $\phi: V \rightarrow W$

Beh.: Durch $\|\phi\| = \sup \{ \|\phi(v)\| \mid v \in V, \|v\| \leq 1 \}$

$\forall \phi \in \mathcal{L}(V, W)$ ist eine Norm auf $\mathcal{L}(V, W)$ definiert.

Seien $\phi, \psi \in \mathcal{L}(V, W)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ zu überprüfen:

(i) $\|\phi\| = 0 \iff \phi = 0_{\mathcal{L}(V, W)}$ (geg. durch $v \mapsto 0_W$)

(ii) $\|\lambda\phi\| = |\lambda| \|\phi\|$

(iii) $\|\phi + \psi\| \leq \|\phi\| + \|\psi\|$

zu i) " $\Leftarrow$ " zeige: $\|0_{\mathcal{L}(V,W)}\| = 0$ gleichbedeutend:

$\sup \{ \|0_{\mathcal{L}(V,W)}(v)\| \mid v \in V, \|v\| \leq 1 \} = 0$ Dies ist klar, wegen
 $\{ \|0_{\mathcal{L}(V,W)}(v)\| \mid \|v\| \leq 1 \} = \{ \|0_W\| \mid \|v\| \leq 1 \} = \{0\}$, und $\sup \{0\} = 0$.

" $\Rightarrow$ " Var. $\rightarrow \sup \{ \|\phi(v)\| \mid v \in V, \|v\| \leq 1 \} = 0$

$\Rightarrow 0$ ist obere Schranke von $\{ \|\phi(v)\| \mid v \in V, \|v\| \leq 1 \}$

$= \{ \|\phi(v)\| \mid v \in V, \|v\| \leq 1 \} = \{0\} \Rightarrow \forall v \in V$ mit $\|v\| \leq 1$

gilt $\|\phi(v)\| = 0$ und somit $\phi(v) = 0_W$. Daraus folgt, dass alle
 $v \in V$ auf 0_W abgebildet werden und somit $\phi = 0_{\mathcal{L}(V,W)}$ gilt, denn:

Sei $v \in V$. 1. Fall: $v = 0_V \Rightarrow \phi(0_V) = 0_W$, da ϕ lineare Abb.

2. Fall: $v \neq 0_V$. Dann gilt $\|\frac{1}{\|v\|} v\| = 1 \Rightarrow \phi(\frac{1}{\|v\|} v) = 0_W$.

$\Rightarrow \phi(v) = \phi(\|v\| \cdot \frac{1}{\|v\|} v) = \|v\| \cdot \phi(\frac{1}{\|v\|} v) = \|v\| 0_W = 0_W$

zu ii) zu zeigen:

$$\sup \{ \|(\lambda\phi)(v)\| \mid v \in V, \|v\| \leq 1 \} = |\lambda| \cdot \|\phi\|$$

allgemein gilt: Ist $A \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige beschränkte Teilmenge, dann gilt $\sup(|\lambda|A) = |\lambda| \sup(A)$. Wende dies auf die Menge $A = \{ \|\phi(v)\| \mid v \in V, \|v\| \leq 1 \}$ an.

$$\Rightarrow \text{gilt } \sup \{ \|(\lambda\phi)(v)\| \mid v \in V, \|v\| \leq 1 \} =$$

$$\sup \{ \|\lambda\phi(v)\| \mid v \in V, \|v\| \leq 1 \} =$$

$$\sup \{ |\lambda| \|\phi(v)\| \mid v \in V, \|v\| \leq 1 \} =$$

Da ϕ

$$\sup (|\lambda| \cdot A) = |\lambda| \cdot \sup(A) = |\lambda| \cdot \|\phi\|$$

zu iii) Nach Def. von $\|\phi + \psi\|$ als Supremum der Menge $B = \{\|(\phi + \psi)(v)\| \mid v \in V, \|v\| \leq 1\}$

genügt es zu zeigen, dass $\|\phi\| + \|\psi\|$ eine obere Schranke von B ist. Sei also $b \in B$

$$\text{worgeg. z.zg. } b \leq \|\phi\| + \|\psi\|$$

$$b \in B \Rightarrow \exists v \in V \text{ mit } \|v\| \leq 1 \text{ und } b = \|(\phi + \psi)(v)\|$$

$$\begin{aligned} \|(\phi + \psi)(v)\| &= \|\phi(v) + \psi(v)\| \leq \|\phi(v)\| + \|\psi(v)\| \\ &\leq \|\phi\| + \|\psi\| \end{aligned}$$

⌊ nach Def. von $\|\phi\|$
wegen $\|v\| \leq 1$

Beispiel für eine Operatornorm

Proposition (2.18)

Seien $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ jeweils mit der Supremums-Norm $\|\cdot\|_\infty$ ausgestattet und $A \in \mathcal{M}_{m \times n, \mathbb{R}}$ eine Matrix. Dann ist die Operatornorm von $\phi_A : V \rightarrow W$, $v \mapsto Av$ gegeben durch

$$\|\phi_A\| = \max \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \mid 1 \leq i \leq m \right\}$$

Man bezeichnet diese Norm auch als [Zeilensummennorm](#).

Beweis von Proposition 2.18 :

Sei $\gamma_A = \max \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \mid 1 \leq i \leq m \right\}$ und

$B = \{ \|\phi_A(v)\|_\infty \mid v \in \mathbb{R}^n, \|v\|_\infty \leq 1 \}$ überprüfe :

i) γ_A ist obere Schranke von B ii) $\gamma_A \in B$

Daraus folgt dann $\gamma_A = \max B = \sup B = \|\phi_A\|$

zu i) Sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\|_\infty \leq 1 \Rightarrow |v_j| \leq 1$ für $1 \leq j \leq n$

Nach Def gilt $\|\phi_A(v)\|_\infty = \max \{ |\phi_A(v)_i| \mid 1 \leq i \leq m \}$

Es reicht also zu zeigen: $|\phi_A(v)_i| \leq \gamma_A$ für $1 \leq i \leq m$

$$|\phi_A(v)_i| = |(Av)_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |v_j|$$

$$\leq \sum_{j=1}^n |a_{i0j}| \leq \gamma_A$$

zu iii) Sei i_0 die Nummer einer Zeile, bei der $\sum_{j=1}^n |a_{i_0j}|$ maximal wird. Definiere $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\|_\infty \leq 1$

$$\text{durch } v_j = \begin{cases} \frac{|a_{i_0j}|}{a_{i_0j}} & \text{falls } a_{i_0j} \neq 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi_A(v)_{i_0} = \sum_{j=1}^n a_{i_0j} v_j = \sum_{j=1}^n |a_{i_0j}| = \gamma_A$$

$$\Rightarrow |\phi_A(v)|_{i_0} = \gamma_A \Rightarrow \|\phi_A(v)\|_\infty = \gamma_A \Rightarrow \gamma_A \in B.$$

$\hookrightarrow \gamma_A$ obere Schranke von B
 $\|v\|_\infty = 1$



Folgerung (2.19)

Jede lineare Abbildung von einem endlich-dimensionalen in einen normierten $\mathbb{R}$ -Vektorraum beliebiger Dimension ist stetig. Jeder Isomorphismus zwischen $\mathbb{R}$ -Vektorräumen derselben endlichen Dimension ist ein Homöomorphismus.

Ein weiteres Stetigkeitskriterium

Satz (2.20)

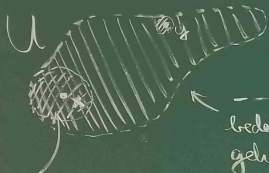
Sei X ein metrischer Raum, und seien V, W zwei endlich-dimensionale, normierte $\mathbb{R}$ -Vektorräume. Eine Abbildung $\varphi : X \rightarrow \mathcal{L}(V, W)$ ist genau dann stetig, wenn die Zuordnung $\varphi_v : X \rightarrow W, x \mapsto \varphi(x)(v)$ für **jeden** Vektor $v \in V$ stetig ist.

Definition (3.1)

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

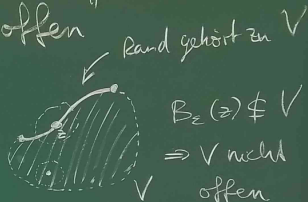
- (i) Eine Teilmenge $U \subseteq X$ wird **offen** genannt, wenn für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ gilt.
- (ii) Man bezeichnet eine Teilmenge $A \subseteq X$ als **abgeschlossen**, wenn das Komplement $X \setminus A$ von A in X offen ist.

Veranschaulichung des Begriffs "offen"



$$B_\varepsilon(x) \subseteq U$$

bedeutet: Der Rand gehört nicht zu U.



$$B_\varepsilon(z) \not\subseteq V$$

$\Rightarrow V$ nicht
offen

Beispiel für eine abgeschlossene Menge:



Beispiele für offene bzw. abgeschlossene Mengen

1) Betrachte $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik $d(a, b) = |a - b|$

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann ist $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ eine offene Teilmenge des metrischen Raums $(\mathbb{R}, d)$

Sei $x \in]a, b[$. z.z. $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : B_\varepsilon(x) \subseteq]a, b[$



Sei $\varepsilon = \min\{x - a, b - x\}$ und $y \in B_\varepsilon(x)$. z.z. $y \in]a, b[$

Nach Def. gilt $B_\varepsilon(x) = \{z \in \mathbb{R} \mid d(x, z) < \varepsilon\} = \{z \in \mathbb{R} \mid |x - z| < \varepsilon\} =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$

also $y \in B_\varepsilon(x) \Rightarrow y > x - \varepsilon \geq x - (x - a) = a \Rightarrow y > a$

$y \in B_\varepsilon(x) \Rightarrow y < x + \varepsilon \leq x + (b - x) = b \Rightarrow y < b$ insg. $y \in]a, b[$

iii) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann ist
 $[a, b]$ eine abgeschlossene Teilmenge von
 $(\mathbb{R}, d)$ denn: z.zg: $\mathbb{R} \setminus [a, b]$ ist
 offene Teilmenge von $(\mathbb{R}, d)$ Sei $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$
 z.zg: Es gibt ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq \mathbb{R} \setminus [a, b]$



1. Fall: $x > b$ Setze $\varepsilon = x - b$, zeige $B_\varepsilon(x) \subseteq \mathbb{R} \setminus [a, b]$

$$\text{Sei } y \in B_\varepsilon(x) \Rightarrow x - \varepsilon < y < x + \varepsilon \Rightarrow$$

$$y > x - \varepsilon = x - (x - b) = b \Rightarrow y > b$$

$$\Rightarrow y \notin [a, b] \Rightarrow y \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$$

2. Fall: $x < a$ Setze $\varepsilon = a - x$, überprüfe:

$B_\varepsilon(x) \subseteq \mathbb{R} \setminus [a, b]$. Sei $y \in B_\varepsilon(x) \rightarrow$

$$x - \varepsilon < y < x + \varepsilon \Rightarrow y < x + \varepsilon = x + (a - x) = a$$

$$\Rightarrow y < a \Rightarrow y \notin [a, b] \Rightarrow y \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$$

(iii) geg: halboffenes Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$

mit $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ 

Beh: $[a, b]$ ist weder offen noch abgeschlossen

(iii) (a) zeige: $[a, b]$ ist nicht offen

Angenommen, $[a, b]$ ist offen $\Rightarrow \forall x \in [a, b]$

gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq [a, b]$, wobei:

~~Es~~ gibt ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(b) \subseteq [a, b]$

aber: Sei $y = b + \frac{1}{2}\varepsilon$. $|y - b| = |b + \frac{1}{2}\varepsilon - b| = \frac{1}{2}\varepsilon$
 $\Rightarrow |y - b| < \varepsilon \Rightarrow y \in B_\varepsilon(b)$

aber: $b + \frac{1}{2}\varepsilon > b \Rightarrow b + \frac{1}{2}\varepsilon \notin]a, b]$

Also gilt $B_\varepsilon(b) \not\subset]a, b]$ $\nrightarrow$ zu (*)

iii) (b) zeige: $]a, b]$ ist nicht abgeschl.

Angenommen $]a, b]$ ist abg. $\Rightarrow \mathbb{R} \setminus]a, b]$ ist
offen $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus]a, b] \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+: B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus]a, b]$

Insbesondere gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(a) \subset \mathbb{R} \setminus]a, b]$

wegen $a \in \mathbb{R} \setminus]a, b]$. aber: Sei $y = a + \frac{1}{2}\varepsilon$
 $|y - a| = |(a + \frac{1}{2}\varepsilon) - a| = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon \Rightarrow y \in B_\varepsilon(a)$

Nach evtl. Verkleinerung von ε können wir

aber: $b + \frac{1}{2}\varepsilon > b \Rightarrow b + \frac{1}{2}\varepsilon \notin]a, b]$

$\varepsilon < b - a$ annehmen, ohne dass sich an
 $B_\varepsilon(a) \subseteq \mathbb{R} \setminus]a, b]$ etwas ändert.

Dann gilt aber $a < a + \frac{1}{2}\varepsilon < b \Rightarrow a + \frac{1}{2}\varepsilon \in]a, b]$
 $\Rightarrow a + \frac{1}{2}\varepsilon \notin \mathbb{R} \setminus]a, b]$.

Also ist $B_\varepsilon(a) \not\subseteq \mathbb{R} \setminus]a, b]$ $\Downarrow$