

Definition (14.10)

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit einer Orthogonalität $\perp$ und $V^\times = V \setminus \{0_V\}$. Eine **Winkelfunktion** bezüglich $(V, \|\cdot\|, \perp)$ ist eine Abbildung $\angle : V^\times \times V^\times \rightarrow [0, \pi]$, die für alle $v, w \in V^\times$ folgende Bedingungen erfüllt.

- (i) $\angle(v, v) = 0$ und $\angle(v, w) = \angle(w, v)$
- (ii) $\angle(v, w) = \angle(v, \lambda w)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}^+$
- (iii) $\angle(v, w) + \angle(w, -v) = \pi$
- (iv) Aus $v \perp w$ folgt $\angle(v, w) = \frac{1}{2}\pi$.
- (v) Aus $v \perp (w - v)$ folgt $\cos \angle(v, w) = \frac{\|v\|}{\|w\|}$.

Die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

Satz (14.16)

Sei (V, b) ein euklidischer $\mathbb{R}$ -Vektorraum, und sei $\|\cdot\|_b : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ die Funktion definiert durch $\|v\|_b = \sqrt{b(v, v)}$ für $v \in V$. Dann gilt für alle $v, w \in V$

(i) die sog. **Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung**

$$|b(v, w)| \leq \|v\|_b \|w\|_b,$$

(ii) die Dreiecksungleichung $\|v + w\|_b \leq \|v\|_b + \|w\|_b$.

Dabei ist die Ungleichung (i) genau dann mit Gleichheit erfüllt, wenn v, w **linear abhängig** sind. Darüber hinaus ist durch $\|\cdot\|_b$ eine Norm auf V definiert. Man nennt sie die von b **induzierte Norm**.

Satz (14.18)

Sei (V, b) ein euklidischer Vektorraum. Dann ist auf dem normierten $\mathbb{R}$ -Vektorraum $(V, \|\cdot\|_b)$ durch

$$v \perp_b w \quad \Leftrightarrow \quad b(v, w) = 0$$

eine **Orthogonalität** definiert, und die eindeutig bestimmte Funktion $\angle_b : V^\times \times V^\times \rightarrow [0, \pi]$ mit

$$\cos \angle_b(v, w) = \frac{b(v, w)}{\|v\|_b \|w\|_b} \quad \text{für alle } v, w \in V^\times$$

ist eine **Winkelfunktion** bezüglich $(V, \|\cdot\|_b, \perp_b)$.

Beweis von Satz 14.18:

- zur Orthogonalität $\perp_B$, siehe Skript
- Existenz und Eindeutigkeit einer Funktion

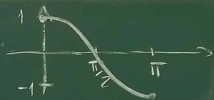
$$\varphi_B: V^* \times V^* \rightarrow [0, \pi] \text{ mit } \cos \varphi_B(v, w) = \frac{b(v, w)}{\|v\|_B \|w\|_B}$$

$$\text{Cauchy-Schwarzsche Ungleichung} \Rightarrow \frac{|b(v, w)|}{\|v\|_B \|w\|_B} \leq 1$$
$$\Rightarrow \frac{b(v, w)}{\|v\|_B \|w\|_B} \in [-1, 1] \quad \text{Analysis einer Variablen} \Rightarrow$$

$\cos: [0, \pi] : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ ist surjektiv

Daraus folgt die Existenz von $\varphi_B(\cdot, \cdot)$

Die Eindeutigkeit folgt aus der Trichotomie



• Nachweis der Eigenschaften eines Winkelfunktion

zu (i) Sei $v \in V^*$ $\frac{B(v,v)}{\|v\|_G \cdot \|v\|_G} = \frac{B(v,v)}{\|v\|_G^2} = 1$, $\cos 0 = 1$
 $\Rightarrow \angle_G(v,v) = 0$

Ist $w \in V^*$ ein weiteres Element, dann gilt $\cos \angle_G(v,w) = \frac{B(v,w)}{\|v\|_G \cdot \|w\|_G}$
 $= \frac{B(w,v)}{\|w\|_G \cdot \|v\|_G} = \cos \angle_G(w,v) \xrightarrow[\text{wg.}]{\cos[0,\pi]} \angle_G(v,w) = \angle_G(w,v)$

zu (ii) geg. $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $v \in V^*$ $\cos \angle_G(v, \lambda w) = \frac{B(v, \lambda w)}{\|v\|_G \cdot \|\lambda w\|_G} = \frac{\lambda B(v,w)}{|\lambda| \cdot \|v\|_G \cdot \|w\|_G}$
 $= \frac{\lambda}{|\lambda|} \cos \angle_G(v,w) \stackrel{\lambda > 0}{=} \cos \angle_G(v,w) \Rightarrow \angle_G(v, \lambda w) = \angle_G(v,w)$

zu iii) Seien $v, w \in V^*$, $\alpha = \angle_E(v, w)$, $\beta = \angle_E(w, -v)$

z.zg. $\alpha + \beta = \pi$

$$\cos(\beta) = \frac{b(w, -v)}{\|w\|_E \cdot \|-v\|_E} = -\frac{b(v, w)}{\|v\|_E \cdot \|w\|_E} = -\cos(\alpha)$$

$$= -\cos(-\alpha) = \cos(\pi - \alpha) \xRightarrow[\cos[0, \pi] \text{ injektiv}]{\beta, \pi - \alpha \in [0, \pi]}$$

$$\beta = \pi - \alpha \rightarrow \alpha + \beta = \pi$$

zu iv) geg. $v, w \in V^*$ mit $v \perp_E w \rightarrow$

$$b(v, w) = 0 \Rightarrow \cos \angle_E(v, w) = \frac{b(v, w)}{\|v\|_E \cdot \|w\|_E} = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \angle_E(v, w) = \frac{\pi}{2}$$

zu v) geg. $v, w \in V^*$ mit $(w-v) \perp_v v$

$$\text{z.zg. } \cos \angle_E(v, w) = \frac{\|v\|_E}{\|w\|_E}$$

$$\begin{aligned}
 (w-v) \perp_G v &\Rightarrow \langle v, w-v \rangle = 0 \Rightarrow \langle v, w \rangle - \langle v, v \rangle \\
 &= 0 \Rightarrow \langle v, v \rangle = \langle v, w \rangle \Rightarrow \cos \angle_G(v, w) \\
 &= \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|_G \|w\|_G} = \frac{\langle v, v \rangle}{\|v\|_G \|w\|_G} = \frac{\|v\|_G^2}{\|v\|_G \|w\|_G} = \frac{\|v\|_G}{\|w\|_G} \quad \square
 \end{aligned}$$

Definition der p -Normen auf dem $\mathbb{R}^n$

Satz (1.1)

Auf dem $\mathbb{R}$ -Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$ ist für jedes $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ durch

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} \quad , \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in V$$

eine Norm definiert, die sogenannte **p -Norm**. Eine weitere Norm erhält man durch

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \quad , \quad \text{die } \textbf{Supremumsnorm}.$$

Beweis von Satz 11:

Erinnerung: Norm auf einem $\mathbb{R}$ -Vektorraum $V = \text{Abg.}$

1. $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $\|v\|=0 \Leftrightarrow v=0_V$, $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$,

$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V$

Überprüfung der Normeigenschaften von $\|\cdot\|_\infty$:

Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|_\infty = 0 \Rightarrow \max\{|v_1|, \dots, |v_n|\} = 0 \Rightarrow$

$|v_k| = 0$ für $1 \leq k \leq n \Rightarrow v = (v_1, \dots, v_n) = 0_{\mathbb{R}^n}$

umgekehrt: $\|0_{\mathbb{R}^n}\|_\infty = \max\{|0|, \dots, |0|\} = 0$

Sei $v \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Sei $k \in \{1, \dots, n\}$, so dass $|v_k|$ maximal.

Dann ist $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ der maximale Betrag einer Komponente von λv . $\Rightarrow \|\lambda v\|_\infty = \|\lambda v_k\| = |\lambda| \|v_k\| = |\lambda| \cdot \|v\|_\infty$

umgekehrt: $\|0\|_\infty = \max\{|0|, \dots, |0|\} = 0$

Sei $v \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Sei $k \in \{1, \dots, n\}$, so dass $|v_k|$ maximal

Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$. z.zg.: $\|v+w\|_\infty \leq \|v\|_\infty + \|w\|_\infty$

Wegen $\|v+w\|_\infty = \max\{|v+w|, \dots, |v+w|\}$ genügt es z.zg.:

$|v_k + w_k| \leq \|v\|_\infty + \|w\|_\infty$ für $1 \leq k \leq n$. Sei also $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\Rightarrow |v_k + w_k| \leq |v_k| + |w_k| \leq \|v\|_\infty + \|w\|_\infty$$

- Ebenso leicht rechnet man die Normeigenschaften von $\|\cdot\|_1$ nach.
- Für $1 < p < \infty$ sind die ersten beiden Normeigenschaften leicht zu überprüfen, die Dreiecksungleichung aber ist sehr aufwändig. □

Lemma zur Höldersche Ungleichung

Lemma (1.2)

Seien $p, q \in \mathbb{R}$, $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $x, y \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt

$$x^{1/p} y^{1/q} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}.$$

Beweisskizze

- Reduziere die Aussage zunächst auf die $x \geq y > 0$.
- Setzt man $\xi = \frac{x}{y}$ und $\eta = \xi - 1$, dann ist die Ungleichung äquivalent zu $(\eta + 1)^{1/p} - 1 \leq \frac{1}{p}\eta$.
- Diese Ungleichung wiederum erhält man durch Anwendung des **Mittelwertsatzes** der Differentialrechnung auf die Funktion $\phi(t) = (t + 1)^{1/p}$ und das Intervall $[0, \eta]$.

Beweisskizze (Forts.)

- Demnach existiert ein $t_0 \in]0, \eta[$ mit $\phi'(t_0) = \phi(\eta) - \phi(0)$.
- Die rechte Seite dieser Gleichung stimmt mit

$$(\eta + 1)^{1/p} - 1 \quad \text{überein.}$$

- Für die linke Seite gilt $\phi'(t_0) = \eta \cdot \frac{1}{p}(t_0 + 1)^{1/p-1} \leq \frac{1}{p}\eta$.

Die Höldersche Ungleichung

Proposition (1.3)

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$, und seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit $p, q > 1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ vorgegeben. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \cdot |y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Die **Höldersche Ungleichung** für $p = q = 2$ ist genau die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

Beweisskizze

- Anwendung des Lemmas auf die Zahlen $\frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p}$ und $\frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$ liefert für $1 \leq i \leq n$ jeweils

$$\frac{|x_i|}{\|x\|_p} \frac{|y_i|}{\|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$$

Beweis der Hölderschen Ungleichung (Forts.)

Beweisskizze (Forts.)

- Außerdem gilt $\sum_{i=1}^n |x_i|^p = \|x\|_p^p$ und $\sum_{i=1}^n |x_i|^q = \|x\|_q^q$.
- Insgesamt kann die Summe $\sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{\|x\|_p} \frac{|y_i|}{\|y\|_q}$ durch 1 abgeschätzt werden.
- Die Höldersche Ungleichung erhält man nun durch Multiplikation mit $\|x\|_p \|y\|_q$.

Herleitung der Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_p$

Beweisskizze

- Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $x + y \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.
- Sei $q \in \mathbb{R}^+$ die Zahl mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
- Setze $z_i = (x_i + y_i)^{p-1}$. Die Höldersche Ungleichung liefert

$$\begin{aligned}\|x + y\|_p^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \\ &\sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} = \\ &\sum_{i=1}^n |x_i| |z_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| |z_i| \leq \|x\|_p \|z\|_q + \|y\|_p \|z\|_q.\end{aligned}$$

Herleitung der Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_p$ (Forts.)

Beweisskizze

- Setzt man die Definition von $\|z\|_q$ ein, dann ergibt eine kurze Rechnung, dass die rechte Seite mit

$$\|x\|_p \cdot \|x + y\|_p^{p-1} + \|y\|_p \cdot \|x + y\|_p^{p-1} \quad \text{übereinstimmt.}$$

- Division der Ungleichung durch $\|x + y\|_p^{p-1}$ liefert das gewünschte Ergebnis.

Die Maximumsnorm als Grenzwert der p -Normen

Proposition (1.4)

Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Beweis von Proposition 14.

geg. $x \in \mathbb{R}^n$, z.zg: $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$

Setze $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ voraus. Sei $k \in \{1, \dots, n\}$ so gewählt, dass $|x_k|$ maximal ist. Betrachte nun die Summe

$$\sum_{i=1}^n \frac{|x_i|^p}{|x_k|^p} \quad \text{Diese kann nach unten abgeschätzt}$$

werden durch 1, nach oben durch n . $\Rightarrow$

$$1 \leq \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|^p}{|x_k|^p} \leq n \quad \forall p \in \mathbb{R}, p > 1 \quad \Rightarrow$$

$$1 \leq \frac{1}{|x_k|} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \leq n^{1/p} \quad \forall p \in \mathbb{R}, p > 1 \quad \Rightarrow$$

$$1 \leq \frac{1}{\|x\|_1} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \leq n^{1/p} \quad \forall p \in \mathbb{R}, p > 1 \Rightarrow$$

$$1 \leq \frac{1}{\|x\|_\infty} \|x\|_p \leq n^{1/p} \Rightarrow \|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \|x\|_\infty n^{1/p} \quad (*)$$

(jeweils für $p \in \mathbb{R}, p > 1$)

$$\text{Es gilt } \lim_{p \rightarrow \infty} n^{1/p} = \lim_{p \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln(n)}{p}} = e^{\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{p}} \quad \begin{array}{l} \text{Stetigkeit der} \\ \text{Exp.-funktion} \end{array} = e^0 = 1$$

Betrachte nun eine beliebige Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $[1, +\infty[$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = +\infty$. Wende auf (*) das Sandwich-Lemma an.

$$\Rightarrow \text{erhalte } \lim_{n \rightarrow \infty} \|x\|_{p_n} = \|x\|_\infty \Rightarrow \lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$$



Definition der Äquivalenz von Normen

Definition (1.5)

Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf einem $\mathbb{R}$ -Vektorraum V werden als **äquivalent** bezeichnet, wenn reelle Konstanten $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ mit der Eigenschaft

$$\gamma_1 \|x\| \leq \|x\|' \leq \gamma_2 \|x\| \quad \text{für alle } x \in V \text{ existieren.}$$

Durch die Äquivalenz ist eine **Äquivalenzrelation** auf der Menge aller Normen auf V definiert.

Geometrische Interpretation der Äquivalenz

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

Sei außerdem $a \in V$ und $r \in \mathbb{R}^+$.

- Definition des **offenen Balls** vom Radius r um a

$$B_{\|\cdot\|,r}(a) = \{x \in V \mid \|x - a\| < r\}$$

- Definition des **abgeschlossenen Balls** vom Radius r um a

$$\bar{B}_{\|\cdot\|,r}(a) = \{x \in V \mid \|x - a\| \leq r\}$$

Proposition (1.6)

Sei $\delta \in \mathbb{R}^+$. Dann ist die Ungleichung $\|x\|' \leq \delta \|x\|$ für alle $x \in V$ gleichbedeutend mit $B_{\|\cdot\|,r}(a) \subseteq B_{\|\cdot\|',\delta r}(a)$ für $a \in V$ und $r \in \mathbb{R}^+$. Eine entsprechende Aussage gilt auch für die abgeschlossenen Bälle.

Bem.: Gleichwertig zur Äquivalenz zweier Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf einem $\mathbb{R}$ -Vektorraum V ist die Bedingung, dass Konstanten $\gamma, \delta \in \mathbb{R}^+$ existieren, so dass

$$\|v\|' \leq \gamma \|v\| \quad \text{und} \quad \|v\| \leq \delta \|v\|' \quad \text{für alle } v \in V \text{ gilt.}$$

Def.: abgeschlossener Ball vom Radius r um den Punkt $a \in V$ bzgl. einer Norm $\|\cdot\|$: $\overline{B}_{\|\cdot\|, r}(a) = \{x \in V \mid \|x - a\| \leq r\}$

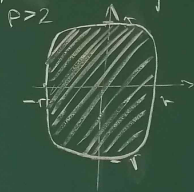
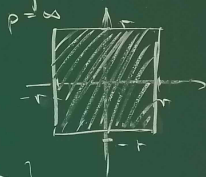
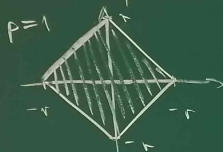
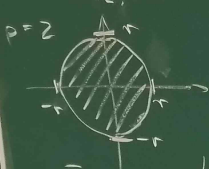
(Abkürzung: $\overline{B}_{\|\cdot\|, r} = \overline{B}_{\|\cdot\|, r}(0_V) = \{x \in V \mid \|x\| \leq r\}$)

offener Ball vom Radius r um $a \in V$:

$$B_{\|\cdot\|, r}(a) = \{x \in V \mid \|x - a\| < r\}$$

Beispiele für abgeschlossene Bälle in $\mathbb{R}^2$:

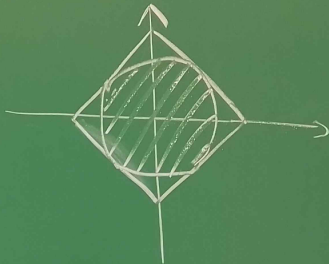
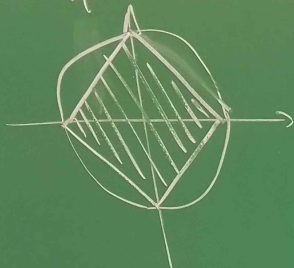
$$\bar{B}_{\|\cdot\|_2, r} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \leq r\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\}$$



$$\bar{B}_{\|\cdot\|_1, r} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| + |x_2| \leq r\}$$

$$\bar{B}_{\|\cdot\|_\infty, r} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x_1|, |x_2|\} \leq r\}$$

zur Äquivalenz von 1- und 2-Norm auf $\mathbb{R}^2$:



Beweis von Proposition 1.6 :

" $\Rightarrow$ " Vor. $\|x\|' \leq \delta \|x\| \quad \forall x \in V$

z.zg. $B_{\|\cdot\|, r}(a) \subseteq B_{\|\cdot\|', \delta r}(a) \quad (*)$

Sei $v \in B_{\|\cdot\|, r}(a) \Rightarrow \|v - a\| < r$

$\Rightarrow \|v - a\|' \leq \delta \|v - a\| < \delta r$

$\Rightarrow v \in B_{\|\cdot\|', \delta r}(a)$

" $\Leftarrow$ " Ang. $(*)$ ist erfüllt für alle $a \in V$, aber

$\|x\|' > \delta \|x\|$ für ein $x \in V$ überprüfe: Dann
gilt $\delta x \in B_{\|\cdot\|, r}$ für $r = \|x\|'$

wegen $\|\delta x\| = \delta \|x\|' < r$

Anderserseits gilt aber $\delta \times \notin B_{||, ||', \delta r}$. $\square$

$$\rightarrow B_{||, ||', r} \not\subseteq B_{||, ||', \delta r}$$