

Definition (12.15)

Sei $A = (a_{ij})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_{n,K}$. Dann nennen wir

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

die **Determinante** der Matrix A .

Man bezeichnet die Summe rechts als **Leibniz-Formel** für die Determinante. Ein wichtiger Spezial ist die **Sarrus-Regel** für $n = 3$. Zu beachten: Das Analogon zur Sarrus-Regel für $n = 4$ bestehend aus acht Summanden ist **falsch**.

Rechenregeln für Determinanten

Satz (12.18)

Man bezeichnet eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,K}$ als **obere Dreiecksmatrix**, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i > j$ erfüllt ist. Für jede Matrix dieser Form gilt

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Satz (12.19)

Für alle $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ gilt $\det(A) = \det({}^t A)$.

Lemma (12.20)

Ist $T, A \in \mathcal{M}_{n,K}$ und T eine **Elementarmatrix**, dann gilt

$$\det(TA) = \det(T) \det(A).$$

Satz (12.21)

Für eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) $A \in \text{GL}_n(K)$ (d.h. die Matrix A ist **invertierbar**)
- (ii) $\text{rg}(A) = n$
- (iii) $\det(A) \neq 0$

Beweis von Satz 12.21

Sei $A \in M_{n,K}$

„(i) $\iff$ (ii)“ bekannt aus § 11:

- $A = M_{\Sigma}(\phi_A)$ wobei $\Sigma = (e_1, \dots, e_n)$ (Einheitsbasis)
und $\phi_A : K^n \rightarrow K^n$ geg. durch $v \mapsto Av$

- ϕ_A ist bijektiv $\iff M_{\Sigma}(\phi_A)$ invertierbar

also: A invertierbar $\iff \phi_A$ bijektiv

Somit ist nur noch zu zeigen: ϕ_A bijektiv $\iff \text{rg}(A) = n$

Dimensionssatz für lineare Abb. $\Rightarrow$

$$n = \dim K^n = \dim \ker(\phi_A) + \dim \text{im}(\phi_A)$$

$$= \dim \ker(\phi_A) + \operatorname{rg}(A) \quad (*1)$$

Schließlich ist noch bekannt:

$\phi: V \rightarrow W$ lineare Abb. zwischen K -Vektorräumen V, W
mit $\dim V = \dim W$, jeweils endlich, dann:

$$\phi \text{ injektiv} \iff \phi \text{ surjektiv} \iff \phi \text{ bijektiv} \quad (*2)$$

$$\text{also insgesamt: } \phi_A \text{ bijektiv} \xrightarrow{(*2)} \phi_A \text{ injektiv} \iff \ker(\phi_A) = \{0_K\} \\ \xrightarrow{(*1)} \dim \ker(\phi_A) = 0 \iff \operatorname{rg}(A) = n.$$

$$''(ii) \iff (iii)'' \text{ zeige: } \operatorname{rg}(A) < n \iff \det(A) = 0$$

bekannt: $\exists T \in GL_n(K)$, so dass TA in Zeilenstufenform
vorliegt. TA ist obere Dreiecksmatrix $\Rightarrow \det(TA) = 0$
genau dann, wenn der Rang der ZSF kleiner als n ist.
außerdem: $\det(A) = 0 \iff \det(TA) = 0$

Insgesamt gilt also $\det(A) = 0 \iff \det(TA) = 0 \iff$
 $r < n \iff \operatorname{rg}(A) < n$ (da sich der Zeilenrang durch
elementare Zeilenumformungen nicht ändert).

Satz (12.22)

Seien $A, B \in \mathcal{M}_{n,K}$. Dann gilt $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Beweis von Satz 12.22

geg. $A, B \in M_{n,K}$, z.zg.

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

1. Fall: $\det(A) = 0$

zu zeigen in diesem Fall: $\det(AB) = 0$

Satz 12.21 $\Rightarrow$ Aus $\det(A) = 0$ folgt

$\operatorname{rg}(A) < n$ und somit $\dim \operatorname{im}(\phi_A) < n$.

Es gilt $\operatorname{im}(\phi_{AB}) = \phi_{AB}(K^n) =$

$$\{A(Bv) \mid v \in K^n\} \subseteq \{Aw \mid w \in K^n\} =$$

$$\dim(\phi_A) \Rightarrow \dim \ker(\phi_{AB}) \leq \dim \ker(\phi_A) < n$$

$$\rightarrow \operatorname{rg}(AB) < n \xrightarrow{\text{Satz 12.21}} \det(AB) = 0$$

2. Fall: $\det(A) \neq 0$ Satz 12.21 $\Rightarrow$

$A \in GL_n(K)$ Dann ist A ein Produkt $T_1 \dots T_r$ von Elementarmatrizen T_i (wobei $r \in \mathbb{N}_0$)

bereits bekannt: T Elementarmatrix $\Rightarrow$

$$\det(TC) = \det(T) \det(C) \quad \forall C \in M_n, K$$

Es genügt also, durch vollständ. Ind. über $r \in \mathbb{N}_0$ zu zeigen:

Ist A ein Produkt von r Elementarmatrizen, dann gilt $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Ind.-Anf. $r=0$ Dann ist $A = E^{(n)}$.

$$\Rightarrow \det(AB) = \det(E^{(n)} B) = \det(B) =$$

$$1 \cdot \det(B) = \det(E^{(n)}) \cdot \det(B)$$

Ind-schritt $r \mapsto r+1$: Sei $A = T_1 \cdots T_{r+1}$, T_j

Elementarmatrix für $1 \leq j \leq r+1$. Setze $A' = T_1 \cdots T_r$.

$$\Rightarrow A = A' T_{r+1} \Rightarrow \det(AB) = \det(A' T_{r+1} B)$$

$$\stackrel{\text{Ind. V.}}{=} \det(A') \det(T_{r+1} B) = \det(A') \det(T_{r+1}) \det(B)$$

$$\stackrel{\text{Ind. V.}}{=} \det(A) \det(B).$$

□

Satz (12.23)

Sei $M \in \mathcal{M}_{n,K}$ eine Blockmatrix der Form

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

mit $A \in \mathcal{M}_{r,K}$, $B \in \mathcal{M}_{r \times (n-r),K}$ und $C \in \mathcal{M}_{n-r,K}$. Dann gilt $\det(M) = \det(A) \det(C)$.

W

Beweis von Satz 12.23

$$\text{z.zg. } \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \det(C)$$

Tr

Seien $T_1, \dots, T_t$ Elementarmatrizen, so dass $A' = T_1 \dots T_t A$ in ZSF vorliegt. Ebenso seien $U_1, \dots, U_s$ Elementarmatrizen, so dass $C' = U_1 \dots U_s C$ in ZSF vorliegt.

Mit A' und C' ist auch $\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix} = M'$ eine obere Dreiecksmatrix.

$$\Rightarrow \det(M') = \det(A') \det(C')$$

$$\text{Sei } M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}. \text{ z.zg. } \det(M) = \det(A) \det(C)$$

zeigen:

Definiere $T_j' = \begin{pmatrix} T_j & 0 \\ 0 & E^{(n-r)} \end{pmatrix} \in GL_n(K)$ für $1 \leq j \leq l$

Es gilt $\det(T_j') = \det(T_j)$ für $1 \leq j \leq l$ und

$T_1' \cdots T_l' \cdot M = \begin{pmatrix} A' & \tilde{B} \\ 0 & C \end{pmatrix}$ für eine Matrix $\tilde{B} \in M_{n \times (n-r)}, K$.

ebenso: Definiere $U_j' = \begin{pmatrix} E^r & 0 \\ 0 & U_j \end{pmatrix} \in GL_n(K)$ für $1 \leq j \leq s$

$\Rightarrow$ Es gilt $\det(U_j') = \det(U_j)$ für $1 \leq j \leq s$ und

$U_1' \cdots U_s' \cdot T_1' \cdots T_l' \cdot M = \begin{pmatrix} A' & \tilde{\tilde{B}} \\ 0 & C' \end{pmatrix}$ für ein $\tilde{\tilde{B}} \in M_{n \times (n-r)}, K$.

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^s \det(U_j') \prod_{j=1}^l \det(T_j') \cdot \det(M) &= \prod_{j=1}^s \det(U_j') \prod_{j=1}^l \det(T_j') \cdot \det(M) \\ &= \det \begin{pmatrix} A' & \tilde{\tilde{B}} \\ 0 & C' \end{pmatrix} = \det(A') \det(C') = \prod_{j=1}^n \det(T_j) \prod_{j=1}^s \det(U_j). \end{aligned}$$

$$\det(A) \cdot \det(C) \Rightarrow \det(M) = \det(A) \cdot \det(C).$$



Notation zum Laplace'schen Entwicklungssatz I

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,K}$. Für beliebige $i, j \in \{1, \dots, n\}$ sei dann $A'_{ij} = (a'_{kl})$ die Matrix in $\mathcal{M}_{n,K}$ mit den Einträgen

$$a'_{kl} = \begin{cases} a_{kl} & \text{für } k \neq i, \ell \neq j \\ 0 & \text{für } k = i, \ell \neq j \\ 0 & \text{für } k \neq i, \ell = j \\ 1 & \text{für } k = i, \ell = j \end{cases}$$

Die Matrix A'_{ij} hat also die Form

$$A'_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Notation zum Laplace'schen Entwicklungssatz II

Mit $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1,K}$ bezeichnen wir die Matrix, die aus A durch **Streichung der i -ten Zeile und j -ten Spalten** zu Stande kommt, also

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Definition der komplementären Matrix

Definition (12.25)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,K}$. Die Matrix $\tilde{A} \in \mathcal{M}_{n,K}$ mit den Einträgen

$$\tilde{a}_{ij} = \det(A'_{ji}) = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$$

wird die zu A **komplementäre** oder **adjunkte** Matrix genannt.

Beispiel: Berechnung der komplementären Matrix
zu $A \in M_{3,0}$ geg. durch

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & -2 \\ 14 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1} \det(A_{11}) = \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 8$$

$$\tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2} \det(A_{21}) = -\det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = -(-16) = 16$$

$$\tilde{a}_{13} = \det(A_{31}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = -8$$

$$\tilde{a}_{21} = -\det(A_{12}) = -\det \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 14 & 0 \end{pmatrix} = -28$$

$$\det \tilde{a}_{22} = \det(A_{22}) = \det \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 14 & 0 \end{pmatrix} = -56$$

$$\det \tilde{a}_{23} = -\det(A_{32}) = -\det \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = -(-4) = 4$$

$$\det \tilde{a}_{31} = \det(A_{13}) = \det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 14 & 4 \end{pmatrix} = -36$$

$$\det \tilde{a}_{32} = -\det(A_{23}) = -\det \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 14 & 4 \end{pmatrix} = -24$$

$$\det \tilde{a}_{33} = \det(A_{33}) = \det \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 12$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \begin{pmatrix} 8 & 16 & -8 \\ -28 & -56 & 4 \\ -36 & -24 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{Es gilt } A \hat{A} = \begin{pmatrix} -96 & 0 & 0 \\ 0 & -96 & 0 \\ 0 & 0 & -96 \end{pmatrix} \\ = (-96) \cdot E^{(3)}$$

Zwei Hilfsaussagen zum Beweis des Laplace'schen Entwicklungssatzes

Lemma (12.24)

Es gilt $\det(A'_{ij}) = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$.

Lemma (12.26)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,K}$. Dann gilt für $1 \leq i, j \leq n$ jeweils

$$\det(A'_{ij}) = \det(a_{1\bullet}, \dots, a_{i-1\bullet}, e_j, a_{i+1\bullet}, \dots, a_{n\bullet})$$

Proposition (12.27)

Sei $\tilde{A}$ die zu $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ komplementäre Matrix. Dann gilt

$$\tilde{A}A = A\tilde{A} = \det(A)E^{(n)}.$$

Beweis von Prop. 12.27:

i) Beh. $A \cdot \tilde{A} = E^{(n)}$ Seien $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Dann ist der Eintrag von $A \cdot \tilde{A}$ an der Stelle (i, j) gleich

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \tilde{a}_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \det(A_{j|k}) =$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \det(a_{1\cdot}, \dots, a_{j-1\cdot}, e_k, a_{j+1\cdot}, \dots, a_{n\cdot})$$

$$= \det(a_{1\cdot}, \dots, a_{j-1\cdot}, \sum_{k=1}^n a_{ik} e_k, a_{j+1\cdot}, \dots, a_{n\cdot})$$

$$= \det(a_{1\cdot}, \dots, a_{j-1\cdot}, a_{i\cdot}, a_{j+1\cdot}, \dots, a_{n\cdot})$$

$$= \begin{cases} \det A & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases} = \delta_{ij} \cdot \det(A) \quad \text{Das ist genau}$$

der Eintrag von $\det(A) \cdot E^{(n)}$ an der Stelle (i, j) .

iii) Beh. $\tilde{A} \cdot A = \det(A) \cdot E^{(n)}$

$${}^t(\tilde{A} \cdot A) = {}^t A \cdot {}^t \tilde{A} \stackrel{(i)}{=} \det({}^t A) \cdot E^{(n)} = \det(A) \cdot E^{(n)}$$

Es leicht zu sehen: ${}^t \tilde{A}$ ist die komplementäre Matrix von ${}^t A$

Satz (12.28)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,K}$.

(i) Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$.

(ii) Für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$.

Wird die Determinante von A mittels (i) berechnet, spricht man von einer **Entwicklung zur i -ten Zeile**. Die Berechnung mittels (ii) bezeichnet man als Entwicklung zur j -ten Spalte.

Beispiel zum Laplaceschen Entwicklungssatz:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det(A_{22}) + 3 \cdot \det(A_{42})$$

↑ Entwicklung zur 2. Spalte

$$2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$2 \cdot (-28) + 3 \cdot 10 = -26$$