Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Abbildungen

Satz (11.2)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, V ein endlich erzeugter und W ein beliebiger K-Vektorraum. Außerdem sei $(v_1, ..., v_n)$ ein Tupel von Vektoren aus V und $(w_1, ..., w_n)$ ein Tupel von Vektoren aus W.

(i) Ist $(v_1, ..., v_n)$ linear unabhängig, dann existiert eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ mit $\phi(v_j) = w_j$ für $1 \leq j \leq n$.

(ii) Gilt $V = \langle v_1, ..., v_n \rangle_K$, dann existiert höchstens eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ mit $\phi(v_j) = w_j$ für $1 \leq j \leq n$.

(iii) Ist $(v_1, ..., v_n)$ eine geordnete Basis von V, dann gibt es genau eine lineare Abbildung mit dieser Eigenschaft.

Definition der Koordinatenabbildungen

Folgerung (11.3)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $\mathscr{B} = (v_1, ..., v_n)$ eine geordnete Basis von V. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\Phi_{\mathscr{B}} : V \to K^n$$

mit $\Phi_{\mathscr{B}}(v_j) = e_j$ für $1 \leq j \leq n$ (wobei e_j jeweils den j-ten Einheitsvektor bezeichnet). Wir nennen sie die Koordinatenabbildung zur geordneten Basis $\mathscr{B}$. Es handelt sich dabei um einen Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Vorgehensweise zur Berechung von $\Phi_{\mathscr{B}}(v)$ für ein $v \in V$:
Stelle v als Linearkombination $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$ dar.
Dann ist $\Phi_{\mathscr{B}}(v) = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

Bsp. für die Berechnung eines Koordinatenvektors:

$V = \mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2

Man kann zeigen, dass $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ mit den Elementen $f_1 = x^2 + 1$, $f_2 = -2x^2 + x - 3$, $f_3 = -x^2 - 3x + 1$ eine geordnete Basis von V ist.

Sei $f = 7x^2 - 5x + 6$. ges.: $\Phi_{\mathcal{B}}(f) \in \mathbb{R}^3$

Für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gilt die Äquivalenz

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = f \Longleftrightarrow$$

$$\lambda_1(x^2+1) + \lambda_2(-2x^2+x-3) + \lambda_3(-x^2-3x+1) = 7x^2-5x+6$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3)x^2 + (\lambda_2 - 3\lambda_3)x + (\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3) = 7x^2-5x+6$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 7,\ \lambda_2 - 3\lambda_3 = -5,\ \lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 = -6$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & -3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 39 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \Phi_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 39 \\ 13 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Eindeutigkeit der Vektorräume bis auf Isomorphie

Folgerung (11.4)

Zwischen zwei beliebigen K-Vektorräumen derselben endlichen Dimension existiert ein Isomorphismus.

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und jeden Körper K ist also der K^n bis auf Isomorphie der einzige n-dimensionale K-Vektoraum.

Beweis von Folgerung 11.4

geg: Körper K, $n \in \mathbb{N}$, V, W n-dim. K-Vektorräume

z.zg.: V und W sind <u>isomorph</u> ($V \cong W$), d.h.

es existiert ein Isom $V \to W$

Sei $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V, $\mathcal{C}$ eine geordnete Basis von W. Folgerung 11.3 $\Rightarrow$ Die Koord.-abb.

$\Phi_{\mathcal{B}}: V \to K^n$, $\Phi_{\mathcal{C}}: W \to K^n$ sind Isomorphismen

$\Rightarrow \Phi_{\mathcal{C}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{B}}$ ist Isomorphismus $V \to W$. $\square$

Die lineare Abbildung $\mathscr{L}^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}(A)$ zu einer Matrix

Definition (11.5)

Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $\mathscr{A} = (v_1, ..., v_n)$, $\mathscr{B} = (w_1, ..., w_m)$ geordnete Basen von V bzw. W. Ferner sei $A = (a_{ij})$ eine Matrix aus $\mathscr{M}_{m \times n, K}$, mit $n = \dim V$ und $m = \dim W$. Dann gibt es nach Satz 11.2 eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\phi : V \longrightarrow W \qquad \text{mit} \qquad \phi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \quad \text{für} \quad 1 \leq j \leq n.$$

Wir bezeichnen diese Abbildung ϕ mit $\mathscr{L}^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}(A)$ und nennen sie die lineare Abbildung zur Matrix A bezüglich der Basen $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$.

Beispiele für die Bestimmung von $\mathcal{L}_{B}^{\mathcal{A}}(A)$:

(1) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{E}_2 = (e_1, e_2)$,
$\mathcal{E}_3 = (e_1, e_2, e_3)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

gesucht: lineare Abb.
$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ geg. durch $\phi = \mathcal{L}_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_2}(A)$

d.h. für jeden Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sollen die drei Komponenten von $\phi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ angeg. werden.

1. Spalte $\Rightarrow \phi(e_1) = 1 \cdot e_1 + 3 e_2 + 5 \cdot e_3$

1. Sp

1. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Spal

2. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Es gil

$\Rightarrow \psi($

$$= 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 5\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$$

genauso: 2 Spalte $\Rightarrow \phi(e_2) = \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \phi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \phi\left(x_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) =$$

$$x_1\phi(e_1) + x_2\phi(e_2) = x_1\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}x_1 + 2x_2\\3x_1 + 4x_2\\5x_1 + 6x_2\end{pmatrix}$$

(2) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$, $\mathcal{C} =$ (w_1, w_2, w_3), wobei $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$,

$w_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

(A):

).

(A)

llen

$\mathbb{R}^3$

$\cdot e_3$

Wie oben sei $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$. ges.: $\psi = \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A)$

1. Spalte $\Rightarrow \psi(v_1) = 1\cdot w_1 + 3\cdot w_2 + 5\cdot w_3 =$

$$1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 5\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\6\\4\end{pmatrix}$$

2. Spalte $\Rightarrow \psi(v_2) = 2\cdot w_1 + 4\cdot w_2 + 6\, w_3 =$

$$2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 6\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\8\\6\end{pmatrix}$$

Es gilt $e_1 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$, $e_2 = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2$

$$\Rightarrow \psi(e_1) = \psi\left(\tfrac{1}{2}v_1 + \tfrac{1}{2}v_2\right) = \tfrac{1}{2}\psi(v_1) + \tfrac{1}{2}\psi(v_2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_2) = \varphi\left(\frac{1}{2} v_1 + \left(-\frac{1}{2}\right) v_2\right) = \frac{1}{2} \varphi(v_1) + \left(-\frac{1}{2}\right) \varphi(v_2)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Für alle } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{gilt } \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \varphi(e_1) + x_2 \cdot \varphi(e_2) = x_1 \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9x_1 - x_2 \\ 7x_1 - x_2 \\ 5x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

$e =$

$)$,

Die Darstellungsmatrix $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}(\phi)$ einer linearen Abbildung

Definition (11.6)

Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $\mathscr{A} = (v_1, ..., v_n)$, $\mathscr{B} = (w_1, ..., w_m)$ geordnete Basen von V bzw. W. Sei $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Für jedes $j \in \{1, ..., n\}$ stellen wir $\phi(v_j)$ als Linearkombination von $\mathscr{B}$ dar; es gilt

$$\phi(v_j) \quad = \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \qquad 1 \le j \le n$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $a_{ij} \in K$. Wir nennen $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{m \times n, K}$ die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich der Basen $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ und bezeichnen sie mit $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}(\phi)$.

Beispiele für die Bestimmung von Darstellungsmatrizen

(1) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{A} = (v_1, v_2)$, $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3)$,

wobei $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

geg. $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 9x_1 - x_2 \\ 7x_1 - x_2 \\ 5x_1 - x_2 \end{pmatrix}$

gesucht: $\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi) \in M_{3\times 2, \mathbb{R}}$

$$\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\phi(v_1) = \phi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{2}} \cdot w_1 + \underline{\underline{2}} \cdot w_2 + \underline{\underline{4}} \cdot w_3$$

$\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \dots \\ 7x_1 - x_2 \\ 5x_1 - x_2 \end{pmatrix}$

gesucht: $M^A_B(\phi) \in M_{3\times 2, \mathbb{R}}$

$$M^A_B(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\phi(v_2) = \phi\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) $V = W = \mathbb{C}^2$, jeweils als $\mathbb{R}$-Vektorräume interpretiert, $A = (e_1, ie_1, e_2, ie_2)$,

$B = (-ie_2, 2e_1, ie_1, 3e_2)$

$\phi: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $v \mapsto (1+i)v$ (Dies ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{C}^2$ nach $\mathbb{C}^2$, aufgefasst als $\mathbb{R}$-Vektorraum).

$$M^A_B(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\phi(e_1) = \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\phi(ie_1) = \begin{pmatrix} -1+i \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\phi(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\phi(ie_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1+i \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wirkung der Darstellungsmatrix auf Koordinatenvektoren

Satz (11.7)

Seien die Bezeichungen wie in der Definition gewählt. Dann gilt

$$\Phi_{\mathscr{B}}(\phi(v)) \quad = \quad \mathscr{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}(\phi)\Phi_{\mathscr{A}}(v) \qquad \text{für alle} \quad v \in V.$$

Beweis von Satz 11.7:

z.zg.: Die lineare Abb. $\Phi_{\mathcal{B}} \circ \phi$ stimmt überein mit der linearen Abb. $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi) \circ \Phi_{\mathcal{A}}$.

Sei $n = \dim V$, $m = \dim W$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{A}}"'] & W \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"] \\ K^n \arrow[r, "v \mapsto M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi) v"'] & K^m \end{tikzcd}$$

Sei $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ die geordnete Basis von V.

Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz

(

S

ma

(1)

mat

$\Rightarrow$ (

$\sum_{i=1}^{m} a$

...bevein

...sis von V

...ssatz

reicht es zu überprüfen, dass für $1 \leq j \leq n$

$$(\Phi_{\mathcal{B}} \circ \phi)(v_j) = \left(M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi) \circ \Phi_{\mathcal{A}}\right)(v_j)$$

Sei $A = (a_{ij}) = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi) \in M_{m \times n}, K$

und $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ die Basis von W.

(1) linke Seite: Nach Def. der Darstellungsmatrix gilt jeweils $\phi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$

$$\Rightarrow (\Phi_{\mathcal{B}} \circ \phi)(v_j) = \Phi_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \Phi_{\mathcal{B}}(w_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

(2) rechte Seite:

$$\left(M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)\circ \Phi_{\mathcal{A}}\right)(v_j) = A\cdot \Phi_{\mathcal{A}}(v_j) = A\cdot e_j$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots \\ a_{mj}\end{pmatrix} = j\text{-te Spalte von } A. \qquad \square$$

Berechne die Abbildung ϕ aus Beispiel (1) mit Hilfe der Darstellungsmatrix. Sei $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}x_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)x_2\right)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Phi_{\mathcal{A}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2\end{pmatrix}$$

Nach Satz 11.7 gilt

$$\Phi_{\mathcal{B}}\left(\phi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)\,\Phi_{\mathcal{A}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 2\\2 & 2\\4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_1 \\ 5x_1 - x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \phi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (5x_1 - x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9x_1 - x_2 \\ 7x_1 - x_2 \\ 5x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$