

Definition der Summe zweier Untervektorräume

Proposition (10.1)

Sei V ein K -Vektorraum, und seien U, U' Untervektorräume von V . Dann sind auch die Mengen

$$U \cap U' \quad \text{und} \quad U + U' = \{u + u' \mid u \in U, u' \in U'\}$$

Untervektorräume von V . Man bezeichnet $U + U'$ als die **Summe** von U und U' .

Definition der direkten Summe von Untervektorräumen

Definition (10.2)

Ein K -Vektorraum V wird **direkte Summe** der Untervektorräume $U, U' \subseteq V$ genannt, wenn die Bedingungen

$$V = U + U' \quad \text{und} \quad U \cap U' = \{0_V\} \quad \text{erfüllt sind.}$$

Die direkte Summe zweier Untervektorräume U, U' wird mit $U \oplus U'$ bezeichnet.

Satz (10.5)

Sei V ein endlich erzeugter K -Vektorraum, und seien W, W' Untervektorräume von V . Dann gilt

$$\dim(W + W') = \dim(W) + \dim(W') - \dim(W \cap W').$$

Beweis von Satz 10.5

geg: endl.-dim. K -Vektorraum V , Untervektorräume
 $W, W' \subseteq V$

Sei $n = \dim(W \cap W')$ und $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis
von $W \cap W'$.

Basisergänzungssatz $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0$, und k verschiedene
Vektoren $w_1, \dots, w_k$, so dass die lin. unabh. Teilmenge
 $\{v_1, \dots, v_n\} \cup \{w_1, \dots, w_k\}$ von W durch $w_1, \dots, w_k$ zu einer Basis von
 W erweitert wird $\Rightarrow \dim W = n + k$

Ergänze ebenso $\{v_1, \dots, v_n\}$ durch l Vektoren ($l \in \mathbb{N}_0$)
 $w_1, \dots, w_l$ (alle verschieden) zu einer Basis von W' .
 $\Rightarrow \dim W' = n + l$

Sei $B = \{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_k, w'_1, \dots, w'_l\}$.

Beh. B ist eine $(n+k+l)$ -elementige Basis von $W+W'$.

(Aus der Beh. folgt $\dim W + \dim W' - \dim(W \cap W')$
 $= (n+k) + (n+l) - n = n+k+l = \dim(W+W')$)

überprüfe. (0) $|B| = n+k+l$ $\uparrow$ Beh. (1) B ist Erzeugendensystem von $W+W'$
(2) B ist linear unabh.

zu (0) klar: $|B| \leq n+k+l$ Ang. $|B| < n+k+l$. Dies ist nur
möglich, wenn $w_j = w'_s$ für ein $j \in \{1, \dots, k\}$ und ein s aus

11, ..., 17 geht. Ang., dies ist der Fall.

Dann folgt $w_j \in W \cap W'$. Da $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von $W \cap W'$ ist, kann w_j als Linearkomb. von $v_1, \dots, v_n$ dargestellt werden. $\downarrow$ zu zeigen: Unabh. der Basis $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_k\}$ des Vektorraums W .

zu (1) Sei $u \in W + W'$. z.zg. u ist eine Linearkombination von B .

$u \in W + W' \Rightarrow \exists w \in W, w' \in W'$ mit
 $u = w + w'$ $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_k\}$ ist Basis

von $W \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_k \in K$ mit

$$w = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^k \mu_j w_j$$

$\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_l\}$ ist Basis von $W' \Rightarrow$

$\exists \lambda'_1, \dots, \lambda'_n, \nu_1, \dots, \nu_l \in K$ mit

$$w' = \sum_{i=1}^n \lambda'_i v_i + \sum_{j=1}^l \nu_j w'_j \quad \longrightarrow$$

$$u = w + w' = \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \lambda'_i) v_i + \sum_{j=1}^k \mu_j w_j + \sum_{j=1}^l \nu_j w'_j \Rightarrow u \text{ ist Linearkombi-}$$

nation von B

zu (2) Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_k, \nu_1, \dots, \nu_l \in K$

mit
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^k \mu_j w_j + \sum_{d=1}^l \nu_d w'_d \stackrel{(*)}{=} 0_V$$

z.zg. $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \mu_1 = \dots = \mu_k = \nu_1 = \dots = \nu_l = 0_K$

$(*) \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^k \mu_j w_j = \sum_{d=1}^l (-\nu_d) w'_d \in W \cap W'$

Da $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von $W \cap W'$ ist, gibt

es $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ mit
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^k \mu_j w_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \alpha_i) v_i + \sum_{j=1}^k \mu_j w_j = 0_V$$

Da $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_k\}$ als Basis von W lin. unabh.

Ist, folgt $\lambda_i - \alpha_i = 0_K$ für $1 \leq i \leq n$ und
 $\mu_j = 0$ für $1 \leq j \leq k$ einsetzen in (*) $\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^k \gamma_j w_j' = 0_V \quad \text{Da } \{v_1, \dots, v_n, w_1', \dots, w_l'\}$$

als Basis von W' lin. unabh. ist, folgt $\lambda_i = 0_K$ für
 $1 \leq i \leq n$ und $\gamma_j = 0_K$ für $1 \leq j \leq l$. $\square$

Folgerung (10.6)

Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum, und seien W, W' Untervektorräume von V , so dass $V = W \oplus W'$ erfüllt ist. Sei B eine Basis von W und B' eine Basis von W' . Dann gilt

- (i) $\dim V = \dim W + \dim W'$
- (ii) Die Mengen B und B' sind disjunkt.
- (iii) Die Vereinigung $B \cup B'$ ist eine Basis von V .

Beweis von Folgerung 10.6

$V = W \oplus W' \Rightarrow V = W + W'$ und $W \cap W' = \{0_V\}$
zu ii) $\dim V = \dim (W + W') \stackrel{\text{Satz 10.5}}{=} \dim W + \dim W' - \dim (W \cap W') = \dim W + \dim W' - \dim \{0_V\} = \dim W + \dim W'$ Sei $m = \dim W$ und $n = \dim W'$.
Sei $B = \{w_1, \dots, w_m\}$ eine Basis von W und $B' = \{w'_1, \dots, w'_n\}$ eine Basis von W' . Wie im Beweis von Satz 10.5 sieht man, dass $E = \{w_1, \dots, w_m, w'_1, \dots, w'_n\} = B \cup B'$ ein Erzeugendensystem von $W + W'$, also von V , ist.

Erzeugendensystem von $W + W'$, also von V , ist -

zu (ii) Ang. $B \cap B' \neq \emptyset \Rightarrow |E| = |B \cup B'| < |B| + |B'|$

$= m + n$ aber: $\dim V = \dim W + \dim W' = m + n$ $\nmid$ da ein $(m+n)$ -dim Vektorraum kein Erz-system mit weniger als $m+n$ Elementen besitzt (siehe §9)

zu (iii) $E = B \cup B'$ ist Erz-system von V , $|E| = m + n = \dim V$
 $\xrightarrow{\S 9}$ E ist Basis von V . $\square$

Folgerung (10.7)

Sei V ein K -Vektorraum, und seien $W_1, \dots, W_r$ Untervektorräume von V mit $V = \bigoplus_{k=1}^r W_k$. Dann gilt $\dim V = \sum_{k=1}^r \dim W_k$. Ist B_k eine Basis von W_k für $1 \leq k \leq r$, dann ist $B = \bigcup_{k=1}^r B_k$ eine Basis von V , und es gilt $B_k \cap B_\ell = \emptyset$ für $k \neq \ell$.

Der Dimensionssatz für lineare Abbildungen

Satz (10.8)

Seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper K , und sei $\phi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt

$$\dim V = \dim \ker(\phi) + \dim \operatorname{im}(\phi).$$

Folgerung (10.9)

Für isomorphe Vektorräume V, W gilt $\dim V = \dim W$.

Beweis von Satz 10.8:

geg: K -Vektorräume V, W , wobei V endl.-dim.
lineare Abb. $\phi: V \rightarrow W$

z.zg: $\dim V = \dim \ker(\phi) + \dim \operatorname{im}(\phi)$, wobei
 $\ker(\phi) = \{v \in V \mid \phi(v) = 0_W\}$, $\operatorname{im}(\phi) = \{\phi(v) \mid v \in V\}$

Sei $m = \dim \ker(\phi)$, $r = \dim \operatorname{im}(\phi)$, $\{u_1, \dots, u_m\}$ eine
Basis von $\ker(\phi)$, $\{w_1, \dots, w_r\}$ eine Basis von $\operatorname{im}(\phi)$.

Da $w_1, \dots, w_r$ in $\operatorname{im}(\phi)$ liegen, gibt es $v_1, \dots, v_r \in V$
mit $\phi(v_j) = w_j$ für $1 \leq j \leq r$.

Sei $B = \{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_r\}$ Beh: B ist Basis von V
mit $|B| = m + r$ Aus der Beh. folgt dann direkt
dass $V = |B| = m + r = \dim_{\text{ker}(\phi)} + \dim_{\text{im}(\phi)}$

zu überprüfen: (0) $|B| = m + r$ (1) B ist Erzeugendensystem von V
(2) B ist linear unabhängig

zu (0) Ang. $|B| < m + r$ Dann stimmen zwei Elemente von $\{v_1, \dots, v_r\}$
überein, oder ein u_i stimmt überein mit einem v_j .

Ang. $v_j = v_k$, wobei $1 \leq j < k \leq r \Rightarrow \phi(v_j) = \phi(v_k)$
 $\Rightarrow w_j = w_k \quad \nmid$ da $\{w_1, \dots, w_r\}$ aus r versch. Ekt. besteht

Ang. $u_i = v_j$, wobei $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, r\} \Rightarrow$
 $\phi(u_i) = \phi(v_j) \Rightarrow 0_V = w_j \quad \nmid$ da w_j Ekt. einer Basis von

zu (1) Sei $v \in V$. z.zg.: v ist darstellbar als
Linear-komb. von $B \Rightarrow \phi(v) \in \text{Im}(\phi)$

$$\begin{aligned} \{w_1, \dots, w_r\} \text{ ist Basis von } \text{Im}(\phi) &\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \\ \lambda_r \in K \text{ mit } \phi(v) &= \sum_{j=1}^r \lambda_j w_j = \sum_{j=1}^r \lambda_j \phi(v_j) \\ &= \phi\left(\sum_{j=1}^r \lambda_j v_j\right) \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{Z. } \phi \text{ linear}}$$

$$\begin{aligned} \phi\left(\sum_{j=1}^r \lambda_j v_j - v\right) &= \phi\left(\sum_{j=1}^r \lambda_j v_j\right) - \phi(v) \\ &= 0_w \Rightarrow \sum_{j=1}^r \lambda_j v_j - v \in \ker(\phi) \end{aligned}$$

$\{u_1, \dots, u_m\}$ ist Basis von $\ker(\phi) \Rightarrow$

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K \text{ mit } \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i = \sum_{j=1}^r \lambda_j v_j - v$$

$$\rightarrow v = \sum_{i=1}^m (1 - \alpha_i) u_i + \sum_{j=1}^r \lambda_j v_j \quad \text{Dies ist eine Linearkomb. von } B$$

zu (2) Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ mit

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^r \lambda_j v_j \stackrel{(*)}{=} 0_V \quad \text{zu zeigen.}$$

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_m = \lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0_K$$

Anwendung von ϕ , Linearität $\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \phi(u_i) + \sum_{j=1}^r \lambda_j \phi(v_j) = 0_W$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot 0_W + \sum_{j=1}^r \lambda_j w_j = 0_W$$

eine

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^r \lambda_j w_j = 0_W \quad \begin{array}{l} \text{da } w_1, \dots, w_r \text{ f.} \\ \text{lin. unabh.} \\ \text{(als Basis)} \end{array}$$

mit

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0_K \quad \text{einsetzen in } (*1)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i = 0_V \quad \begin{array}{l} \text{da } u_1, \dots, u_m \text{ f.} \\ \text{Basis von } \ker(\phi) \end{array} \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0_K$$



Beweis von Folgerung 10.9

geg: isomorphe K -Vektorräume V, W

Ann: V, W beide endl.-dim (andere Fall: Skript)

V, W isomorph $\Rightarrow \exists$ bijektive lineare Abb. $\phi: V \rightarrow W$

ϕ injektiv $\Rightarrow \ker(\phi) = \{0_V\}$ ϕ surj $\Rightarrow \operatorname{im}(\phi) = W$

Dimensionssatz 10.8 $\Rightarrow \dim V = \dim \ker(\phi) + \dim \operatorname{im}(\phi)$

$$= \dim \{0_V\} + \dim W = 0 + \dim W = \dim W$$

□