

Satz (9.6)

Sei V ein endlich erzeugter K -Vektorraum.

- (i) In V existiert eine endliche Basis B .
- (ii) Für jede Basis B' von V gilt $|B'| = |B|$, insbesondere ist jede Basis endlich.
- (iii) Ist $S \subseteq V$ linear unabhängig und $E \supseteq S$ ein Erzeugendensystem von V , dann gibt es eine Basis B' mit $S \subseteq B' \subseteq E$.

Folgerung (9.7)

Sei V ein endlich erzeugter K -Vektorraum.

(i) (*Basisergänzungssatz*)

Jede linear unabhängige Teilmenge $S \subseteq V$ kann zu einer Basis von V ergänzt werden.

(ii) (*Basisauswahlsatz*)

Aus jedem Erzeugendensystem E von V kann man eine Basis von V auswählen.

- Teil (i) folgt durch Anwendung von Satz 9.6 (iii) auf $E = V$
- Teil (ii) folgt durch Anwendung von Satz 9.6 (iii) auf $S = \emptyset$

Definition (9.8)

Sei V ein K -Vektorraum. Dann ist die **Dimension** von V definiert durch

$$\dim_K V = \dim V = \begin{cases} |B| & \text{falls } B \text{ eine endliche Basis von } V \text{ ist,} \\ \infty & \text{falls } V \text{ nicht endlich erzeugt ist.} \end{cases}$$

Beispiele für die Dimension von Vektorräumen

- (i) $\dim_K K^n = n$ für jeden Körper K und jedes $n \in \mathbb{N}$
- (ii) $\dim_K \mathcal{M}_{m \times n, K} = mn$ für jeden Körper K und alle $m, n \in \mathbb{N}$
- (iii) $\dim_K K = 1$ für jeden Körper K
- (iv) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$
- (v) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- (vi) $\dim_K \{0_V\} = 0$ für jeden Körper K
- (vii) $\dim_K K[x] = \infty$ für jeden Körper K

Folgerung (9.9)

Sei V ein endlich erzeugter K -Vektorraum und $n = \dim V$.

- (i) Für jede linear unabhängige Teilmenge $S \subseteq V$ gilt $|S| \leq n$ mit Gleichheit genau dann, wenn S eine Basis von V ist.
- (ii) Für jedes Erzeugendensystem E von V gilt $|E| \geq n$ mit Gleichheit genau dann, wenn E eine Basis von V ist.

Beweis von Folgerung 9.9

geg. endl.-dim. K -Vektorraum, $n = \dim V$

zu ii) Sei $S \subseteq V$ linear unabh. Basisergänzungssatz

$\Rightarrow \exists$ Basis $B \supseteq S$ von V Es ist $|B| = \dim V = n$

$S \subseteq B \Rightarrow |S| \leq |B| = n$

Beweis der Äquivalenz: " $\Rightarrow$ " Vor.: $|S| = n = |B|$

$S \subseteq B$ $S = B \Rightarrow S$ ist Basis von V

" $\Leftarrow$ " Vor.: S ist Basis $\Rightarrow |S| = n = \dim V$
(jede Basis besitzt n Elemente)

$S \subseteq B \Rightarrow S = B \Rightarrow S$ ist Basis von V

Moodle: • Problemlabs

• LyMplus

zulii) Sei $E \subseteq V$ ein Erzeugendensystem von V .

Basisauswahlsatz $\rightarrow \exists$ Basis $B \subseteq E \Rightarrow |E| \geq |B|$
 $= \dim V = n$ Beweis der Äquivalenz.

" $\Rightarrow$ " Var. $|E| = n = |B| \xrightarrow{B \subseteq E} E = B \rightarrow E$ ist Basis

" $\Leftarrow$ " Var. E ist Basis $\rightarrow |E| = n$, da jede Basis n Elemente enthält $\square$

Folgerung (9.10)

Sei V ein endlich erzeugter K -Vektorraum, $n = \dim V$ und U ein Untervektorraum von V . Dann gilt $\dim U \leq n$ mit Gleichheit genau dann, wenn $U = V$ gilt.

Satz (9.11)

- Seien $m, n \in \mathbb{N}$.
- Sei $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine n -elementige Teilmenge von K^m .
- Sei $A \in \mathcal{M}_{m \times n, K}$ die Matrix, deren Spalten genau die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ sind.
- Sei A' die Matrix in normierter ZSF, die man durch Anwendung des **Gauß-Verfahrens** auf A erhält.
- Seien $r, j_1, \dots, j_r$ die Kennzahlen der ZSF.

Dann ist $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_r}\}$ eine **Basis** von $\langle S \rangle_K$.

konkrete Durchführung der Basisauswahl:

Betrachte den $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathbb{R}^3$,

$$E = \{v_1, v_2, v_3\}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

gesucht: Basis $B \subseteq E$ von $U = \langle E \rangle_{\mathbb{R}}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ZSF mit den Kennzahlen} \\ r=2, \quad j^1=1, \quad j^2=2$$

$$\Rightarrow B = \{v_{j^1}, v_{j^2}\} = \{v_1, v_2\} \text{ ist Basis von } \langle E \rangle_{\mathbb{R}}$$

Praktische Umsetzung des Basisergänzungssatzes

- Seien $m, n \in \mathbb{N}$.
- Sei $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine n -elementige **linear unabhängige** Teilmenge von K^m . Dann ist $n \leq m$. Das Ziel besteht darin, S zu einer Basis des K^m zu ergänzen.
- Durch $E = \{v_1, \dots, v_n, e_1, \dots, e_m\}$ ist ein **Erzeugendensystem** von K^m als K -Vektorraum gegeben, da bereits die Einheitsvektoren e_j ein Erzeugendensystem bilden.
- Wendet man das Verfahren aus Satz 9.11 auf die Matrix $A \in \mathcal{M}_{m \times (n+m), K}$ mit den Vektoren aus E als Spalten an (in der angegebenen Reihenfolge), so erhält man eine Basis B des K^m mit $B \supseteq S$.

Beispiel zur Basisergänzung:

Sei $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$. Sei $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Ziel: Ergänze $S = \{v_1, v_2\}$ zu einer Basis
des $\mathbb{R}^3$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

ZSF mit Kennzahlen
 $r=3$, $j_1=1$, $j_2=2$, $j_3=4$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
sis

$\Rightarrow B = \{v_1, v_2, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ ist Basis des $\mathbb{R}^3$

$\rightarrow$

$\mapsto$

2
hlen

$$2 \cdot 2 = 4$$

Definition der Summe zweier Untervektorräume

Proposition (10.1)

Sei V ein K -Vektorraum, und seien U, U' Untervektorräume von V . Dann sind auch die Mengen

$$U \cap U' \quad \text{und} \quad U + U' = \{u + u' \mid u \in U, u' \in U'\}$$

Untervektorräume von V . Man bezeichnet $U + U'$ als die **Summe** von U und U' .

Beliebige endliche Summen von Untervektorräumen

Auch aus mehr als zwei Untervektorräumen kann eine Summe gebildet werden. Sei V ein K -Vektorraum, und sei $U_1, U_2, U_3, \dots$ eine beliebige Anzahl von Untervektorräumen von V . Man definiert

$$\sum_{k=1}^1 U_k = U_1 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{r+1} U_k = \left(\sum_{k=1}^r U_k \right) + U_{r+1} \quad \text{für } r \geq 1.$$

Es gilt dann

$$\sum_{k=1}^r U_k = \left\{ \sum_{k=1}^r u_k \mid u_k \in U_k \text{ für } 1 \leq k \leq r \right\}.$$

Definition der direkten Summe von Untervektorräumen

Definition (10.2)

Ein K -Vektorraum V wird **direkte Summe** der Untervektorräume $U, U' \subseteq V$ genannt, wenn die Bedingungen

$$V = U + U' \quad \text{und} \quad U \cap U' = \{0_V\} \quad \text{erfüllt sind.}$$

Die direkte Summe zweier Untervektorräume U, U' wird mit $U \oplus U'$ bezeichnet.

Beispiel für eine direkte Summe:

$$V = \mathbb{R}^3, \quad U = \langle e_1, e_2 \rangle_{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$U' = \langle e_3 \rangle_{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{Dann gilt } V = U \oplus U'.$$

Lemma (10.3)

Sei V ein K -Vektorraum mit Untervektorräumen $U, U' \subseteq V$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (i) $V = U \oplus U'$
- (ii) Für jedes $v \in V$ gibt es eindeutig bestimmte Vektoren $u \in U$ und $u' \in U'$ mit $v = u + u'$.

Beweis von Lemma 10.3

geg. K -Vektorraum V , U, U' Unterräume von V

"(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Vor. $V = U \oplus U'$ Sei $v \in V$

z.zg. Es gibt eindeutig bestimmte $u \in U, u' \in U'$ mit $v = u + u'$

Existenz: $v \in V, V = U + U' \Rightarrow \exists u \in U, u' \in U'$ mit $v = u + u'$

Eindeutigkeit: Seien $u_1, u_2 \in U, u'_1, u'_2 \in U'$ mit

$$(*) \quad u_1 + u'_1 = v = u_2 + u'_2 \quad \text{z.zg.} \quad u_1 = u_2, u'_1 = u'_2$$

$$(*) \Rightarrow u_1 - u_2 = u'_2 - u'_1 \quad u_1, u_2 \in U, U \text{ ist Untervektorraum} \Rightarrow$$

$$u_1 - u_2 \in U \text{ ebenso: } u'_2 - u'_1 \in U' \quad \text{also: } u_1 - u_2 = u'_2 - u'_1 \in$$

$$U \cap U' = \{0_V\} \Rightarrow u_1 - u_2 = 0_V \text{ und } u'_2 - u'_1 = 0_V$$

$$\Rightarrow u_1 = u_2 \text{ und } u'_2 = u'_1$$

lii) $\Rightarrow$ li)" Vor: eindeutige Darstellung für jedes $v \in V$ in der Form $v = u + u'$ mit $u \in U$ und $u' \in U'$

z.zg. $V = U \oplus U'$, also (1) $V = U + U'$ (2) $U \cap U' = \{0_V\}$

zu (1) " $\supseteq$ " klar nach Def. " $\subseteq$ " Sei $v \in V$. Vor $\Rightarrow$

$\exists u, u' \in U'$ mit $v = u + u' \Rightarrow v \in U + U'$

zu (2) " $\supseteq$ " U, U' sind Untervektorräume $\Rightarrow$

$0_V \in U$ und $0_V \in U' \rightarrow 0_V \in U \cap U'$

" $\subseteq$ " Ang. $v \in U \cap U'$ mit $v \neq 0_V$. Dann gilt

$v + 0_V = v = 0_V + v$ $\nearrow$ zur Eindeutigkeit
 $u \in U \quad u' \in U'$

□

Rekursive Definition mehrfacher direkter Summen

Sei V ein K -Vektorraum, und seien $U_1, U_2, U_3, \dots$
Untervektorräume von V . Dann setzt man

$$\bigoplus_{k=1}^1 U_k = U_1 \quad \text{und} \quad \bigoplus_{k=1}^{r+1} U_k = \left(\bigoplus_{k=1}^r U_k \right) \oplus U_{r+1} \quad \text{für } r \geq 1.$$

Damit die direkte Summe $\bigoplus_{k=1}^{r+1} U_k$ gebildet werden kann, dürfen sich $\bigoplus_{k=1}^r U_k$ und U_{r+1} jeweils nur in $\{0_V\}$ schneiden.

Satz (10.4)

Sei V ein Vektorraum, $r \in \mathbb{N}$, und seien $U_1, \dots, U_r$ Untervektorräume von V . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) Es gilt $V = \bigoplus_{k=1}^r U_k$.

(ii) Jeder Vektor $v \in V$ kann auf **eindeutige Weise** als Summe $v = \sum_{k=1}^r u_k$ dargestellt werden, mit $u_k \in U_k$ für $1 \leq k \leq r$.

(iii) Für $1 \leq k \leq r$ gilt $V = \sum_{j=1}^r U_j$ und $U_k \cap \left(\sum_{j \neq k} U_j \right) = \{0_V\}$.