Definition (8.1)

Sei V ein K -Vektorraum, $r \in \mathbb{N}_0$ und $(v_1, \dots, v_r)$ ein Tupel von Elementen aus V . Wir bezeichnen einen Vektor $w \in V$ als **Linearkombination** des Tupels, wenn ein Tupel $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in K^r$ existiert, so dass

$$w = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i \quad \text{erfüllt ist.}$$

Definition des erzeugten Untervektorraums

Definition (8.2)

Sei V ein K -Vektorraum und $S \subseteq V$ eine beliebige Teilmenge. Dann bezeichnen wir mit

$$\langle S \rangle_K = \left\{ \sum_{k=1}^r \lambda_k v_k \mid r \in \mathbb{N}_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K, v_1, \dots, v_r \in S \right\}$$

die Menge **aller Linearkombinationen** von Tupeln bestehend aus Vektoren der Menge S . Man nennt $\langle S \rangle_K$ den von S **erzeugten** oder **aufgespannten** Untervektorraum.

Satz (8.3)

Sei V ein K -Vektorraum und $S \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann gilt

- (i) Die Menge $\langle S \rangle_K$ bildet einen Untervektorraum von V mit $\langle S \rangle_K \supseteq S$.
- (ii) Ist U ein weiterer Untervektorraum von V mit $U \supseteq S$, dann gilt $U \supseteq \langle S \rangle_K$.

Es handelt sich also bei $\langle S \rangle_K$ um den **kleinsten** Untervektorraum von V , der S als Teilmenge enthält.

Definition (8.4)

Ist V ein K -Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, dann wird jede Teilmenge $S \subseteq V$ mit der Eigenschaft $U = \langle S \rangle_K$ ein **Erzeugendensystem** von U genannt.

Satz (8.5)

Für jeden Ring R gibt es einen **Erweiterungsring** $R[x] \supseteq R$ mit einem ausgezeichneten Element $x \notin R$, so dass für jedes $f \in R[x]$ folgende Bedingung erfüllt ist. Entweder ist $f = 0_R$, oder es gibt ein eindeutig bestimmtes $n \in \mathbb{N}_0$ und eindeutig bestimmte Elemente $a_0, \dots, a_n \in R$ mit

$$f = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad \text{und} \quad a_n \neq 0_R.$$

Man nennt $R[x]$ den **Polynomring** über dem Körper R , seine Elemente bezeichnet man als *Polynome*. Im Fall $f \neq 0_R$ bezeichnet man n als den **Grad** des Polynoms.

Achtung: Zwischen einem Polynom und der Funktion, die durch das Polynom definiert ist, muss streng unterschieden werden.

Bsp.: $f = x^2 + 3 \in \mathbb{R}[x]$ definiert eine Funktion

$\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(-1) = 4$, $f(0) = 3$, $f(1) = 4, \dots$

Die Funktion $\hat{f}$ ist aber nicht mit f identisch

f ist ein Element des Polynomrings, also ein

"formales Ausdrück mit x "

Ist K ein endlicher Körper, z.B. $K = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$,
dann kann es passieren, dass verschiedene Polynome die-
selbe Funktion $K \rightarrow K$ liefern.

Bsp. $f = x^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$, $g = x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$

$$\hat{f}(0) = 1, \hat{f}(1) = \bar{2} = \bar{0}, \hat{g}(0) = 1, \hat{g}(1) = \bar{2} = \bar{0}$$

Bem. Ist K ein Körper, dann ist der Polynomring $K[x]$ ein K -Vektorraum, mit $(f, g) \mapsto f + g$ als Vektoraddition und $K \times K[x] \rightarrow K[x], (a, f) \mapsto af$ als skalare Multiplikation.

- Das Polynom $f = x^2 + 3$ ist eine Linearkombination des Tripels $(1, x, x^2)$ von Vektoren ($f = 3 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2$)
- Die Menge $S = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ bildet ein Erzeugendensystem von $K[x]$ als K -Vektorraum.
 $\sqsubset$ Monome

für $1 \leq l \leq n$

□

Beh. Sei K ein Körper, $K[x]$ der Polynomring über K .
Dann ist $S = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von $K[x]$.

Ang. S ist linear abhängig. Dann gibt es ein linear abhängiges
Tupel $(x^{n_1}, \dots, x^{n_r})$ in S ($r \in \mathbb{N}$, $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}_0$ paarweise
verschieden) lineare Abh. $\rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ mit

$$\sum_{k=0}^r \lambda_k x^{n_k} = 0_K, \quad \lambda_j \neq 0 \text{ für mind. ein } j$$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^r \lambda_k x^{n_k}$ ist nicht das Nullpolynom 0_K , nach Definition des Polynomrings $K[x]$.

Erzeugendensystem von $K[x]$ als K -Vektorraum.

- Es ist leicht zu sehen, dass es keine endliche Teilmenge $T \subseteq K[x]$ gibt, die ein Erzeugendensystem von $K[x]$ als K -Vektorraum bildet. (denn: Ang T ist eine solche Menge. Sei $n = \max\{\text{grad}(f) \mid f \in T\}$ ($n \in \mathbb{N}_0$). Dann gilt $x^{n+1} \notin \langle T \rangle_K$.)

Definition der linearen Unabhängigkeit eines Tupels

Definition (8.6)

Sei V ein K -Vektorraum. Wir bezeichnen ein Tupel $(v_1, \dots, v_r)$ mit $r \in \mathbb{N}_0$, bestehend aus Vektoren $v_k \in V$, als **linear unabhängig**, wenn für jedes Tupel $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in K^r$ die Implikation

$$\sum_{k=1}^r \lambda_k v_k = 0_V \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0_K \quad \text{erfüllt ist.}$$

erfüllt ist. Ein Tupel, das nicht linear unabhängig ist, wird **linear abhängig** genannt.

Bem. Ein Tupel $(v_1, \dots, v_r)$ von Vektoren
ist genau dann linear abhängig, wenn
Folgendes gilt: Es gibt $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$,
nicht alle gleich 0_K , mit $\sum_{k=1}^r \lambda_k v_k = 0_V$

Bsp. $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dann ist (v_1, v_2, v_3) linear abhängig im $\mathbb{R}$ -
Vektorraum V , denn: $1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
aber $(1, 1, -1) \neq (0, 0, 0)$

Bsp.

Und

als

beispiel

Bsp.

(i) Betr.

$(1, i)$

Vekt.

Seien

z.B.

Bem. Um lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit festzustellen, muss V als Vektorraum (und nicht nur als Menge) bekannt sein.

Bsp. $V = \mathbb{C}$

(i) Betrachte V als $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Dann ist $(1, i)$ ein linear unabhängiges Tupel von Vektoren. z.zg. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a \cdot 1 + b \cdot i = 0 \Rightarrow a = b = 0$

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot 1 + b \cdot i = 0$

z.zg. $a = b = 0$

$$\operatorname{Re}(a \cdot 1 + b \cdot i) = \operatorname{Re}(a + i b) = a$$

$$\operatorname{Im}(a \cdot 1 + b \cdot i) = \operatorname{Im}(a + i b) = b$$

$$\text{also: } a = \operatorname{Re}(a \cdot 1 + b \cdot i) = \operatorname{Re}(0) = 0$$

$$b = \operatorname{Im}(a \cdot 1 + b \cdot i) = \operatorname{Im}(0) = 0$$

(ii) Betrachte nun V als $\mathbb{C}$ -Vektorraum.
Dann ist das Tupel $(1, i)$ linear abhängig,
denn: $1 \cdot 1 + i \cdot i = 0$, aber $(1, i) \neq (0, 0)$.

Beispiele für linear unabhängige Tupel

- Das leere Tupel $()$ ist nach Definition linear unabhängig.
- Ein Tupel (v) bestehend aus einem einzelnen Vektor v ist genau dann linear unabhängig, wenn $v \neq 0_V$ ist.
- Ein Paar (v, w) bestehend aus zwei Vektoren ist genau dann linear unabhängig, wenn $v \neq 0_V$ und w kein skalares Vielfaches von v ist, also $w \neq \lambda v$ für alle $\lambda \in K$ gilt.
- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist im K -Vektorraum K^n das Tupel $(e_1, \dots, e_n)$ bestehend aus den Einheitsvektoren linear unabhängig.

geg K -Vektorraum V , $v, w \in V$

Beh. (v, w) linear unabh. $\iff v \neq 0_V$ und $\forall \lambda \in K: w \neq \lambda v$

" $\Leftarrow$ " Vor: $v \neq 0_V$ und $\forall \lambda \in K: w \neq \lambda v$

Ang. (v, w) ist lin. abhängig = $\exists \alpha, \beta \in K$ mit
 $\alpha \neq 0$ oder $\beta \neq 0$ und zugleich $\alpha v + \beta w = 0_V$

1. Fall. $\beta \neq 0$ $\alpha v + \beta w = 0_V \implies \beta w = -\alpha v \xrightarrow{\beta \neq 0}$

$w = -\alpha \beta^{-1} v \nmid$ zu $w \neq \lambda v \forall \lambda \in K$

2. Fall. $\beta = 0$ Dann ist $\alpha \neq 0$. $\alpha v + \beta w = 0_V \xrightarrow{\beta = 0}$

$\alpha v = 0_V \xrightarrow{\alpha \neq 0} \alpha^{-1} \cdot \alpha v = 0_V \implies v = 0_V \nmid$

$$\lambda v = 0_V \Rightarrow \lambda \cdot \alpha \cdot v = 0_V \Rightarrow v = 0_V \quad \Downarrow$$

$\Rightarrow$ "Ang. (v, w) ist lin. unabh., aber die Bed. rechts gilt nicht, d.h. $v = 0_V$ oder $\exists \lambda \in K: w = \lambda v$

1. Fall: $v = 0_V$ Dann gilt $1_K \cdot v + 0_K \cdot w = 0_V$, aber $(1_K, 0_K) \neq (0_K, 0_K) \Rightarrow \Downarrow$ zu linearen Unabh.

2. Fall: $\exists \lambda \in K$ mit $w = \lambda \cdot v$ Dann gilt $\lambda v + (-1_K) \cdot w = 0_V$
aber $(\lambda, -1_K) \neq (0_K, 0_K) \Rightarrow \Downarrow$ zu linearen Unabh.

□

Erinnerung: Die Koordinaten des k -ten Einheitsvektors

$e_k \in K^n$ sind geg. durch $e_{kl} = \delta_{kl} = \begin{cases} 1_K & \text{falls } l=k \\ 0_K & \text{falls } l \neq k \end{cases}$

Nachweis des linearen Unabhängigkeit von $(e_1, \dots, e_n)$

im K -Vektorraum K^n (K korp., $n \in \mathbb{N}$):

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \stackrel{(*)}{=} 0_{K^n}$. z.zg. $\lambda_k = 0_K$ für $1 \leq k \leq n$

Betrachte für $l \in \{1, \dots, n\}$ jeweils die l -te Komponente von $(*)$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \lambda_k \delta_{kl} = 0_K \stackrel{\substack{\delta_{kl} = 0 \\ \text{für } k \neq l}}{\Rightarrow} \lambda_l \cdot \delta_{ll} = 0_K \Rightarrow \lambda_l = 0_K$$

für $1 \leq l \leq n$

□

Definition der linearen Unabhängigkeit einer Teilmenge

Definition (8.7)

Sei V ein K -Vektorraum. Eine Teilmenge $S \subseteq V$ bezeichnen wir als **linear unabhängig**, wenn jedes Tupel $(v_1, \dots, v_r)$ bestehend aus lauter **verschiedenen** Elementen v_k der Menge S linear unabhängig ist.

Lemma (8.8)

Sei V ein K -Vektorraum.

- (i) Ist $S \subseteq V$ linear unabhängig, dann gibt dasselbe für jede Teilmenge $T \subseteq S$. Insbesondere ist die leere Menge stets linear unabhängig.
- (ii) Jede Teilmenge $S \subseteq V$ mit $0_V \in S$ ist linear abhängig.
- (iii) Ist $r \in \mathbb{N}_0$ und sind $v_1, \dots, v_r \in V$ mit $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$, so ist r -elementige Menge $\{v_1, \dots, v_r\}$ genau dann linear unabhängig, wenn das Tupel $(v_1, \dots, v_r)$ linear unabhängig ist.

Beispiele für linear unabhängige Mengen

- Die Menge $\{e_1, \dots, e_n\}$ der **Einheitsvektoren** ist eine n -elementige linear unabhängige Teilmenge des K -Vektorraums K^n .
- Auf ähnliche Weise kann man zeigen, dass die Menge $\{B_{k\ell}^{(m \times n)} \mid 1 \leq k \leq m, 1 \leq \ell \leq n\}$ der **Basismatrizen** im K -Vektorraum $\mathcal{M}_{m \times n, K}$ der $m \times n$ -Matrizen linear unabhängig ist.
- Im Polynomring $K[x]$, aufgefasst als K -Vektorraum, ist die Teilmenge $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ bestehend aus den sog. **Monomen**, linear unabhängig.

Proposition (8.9)

Sei V ein K -Vektorraum und $S \subseteq V$ eine beliebige Teilmenge.

- (i) Genau dann ist S linear abhängig, wenn ein $v \in S$ mit $v \in \langle S \setminus \{v\} \rangle_K$ existiert.
- (ii) Sie ist genau dann linear unabhängig, wenn $v \notin \langle S \setminus \{v\} \rangle_K$ für alle $v \in S$ erfüllt ist.
- (iii) Ist S linear unabhängig und $v \in V \setminus \langle S \rangle_K$, dann ist auch $S \cup \{v\}$ linear unabhängig.

Beweis von Prop. 8.9

zu "ii)" " $\Leftarrow$ " Sei $v \in S$ mit $v \in \langle S \setminus \{v\} \rangle_K$.

z.zgl.: S ist linear abhängig. Wegen

$v \in \langle S \setminus \{v\} \rangle_K$ gibt es ein Tupel $(v_1, \dots, v_r)$ be-

stehend aus verschiedenen Elementen $v_j \in S \setminus \{v\}$

und $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ mit $v = \sum_{j=1}^r \lambda_j v_j \rightarrow$

$\sum_{j=1}^r \lambda_j v_j + (-1_K) \cdot v = 0_V$. Das Tupel $(v_1, \dots, v_r, v)$

besteht aus versch. Elementen der Menge S , und

$(\lambda_1, \dots, \lambda_r, -1_K) \neq (0_K, \dots, 0_K)$. Also ist das Tupel,

und damit auch S , linear abhängig.