Ralf Gerkmann

Mathematisches Institut der
Ludwig-Maximilians-Universität München

Sommersemester 2025

Analysis mehrerer Variablen

Inhaltsverzeichnis

§ 1. Konvergenz in metrischen Räumen

Inhaltsübersicht

In Kapitel § 14 haben wir zwei wichtige neue Grundbegriffe eingeführt: die Normen auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum und die Metriken auf einer Menge. Allerdings kennen wir bisher abgesehen von der Norm $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$, die durch das euklidische Standard-Skalarprodukt induziert wird, keine weiteren konkreten Beispiele. Wir beginnen das aktuelle Kapitel mit der Einführung einer Vielzahl weiterer Normen auf dem $\mathbb{R}^n$, den sog. *p-Normen*. Außerdem behandeln wir das Konzept der *Äquivalenz* von Normen, das im Hinblick auf die mehrdimensionale Analysis eine wichtige Rolle spielt, weil viele analytische Eigenschaften von Funktionen (wie Stetigkeit oder Differenzierbarkeit) unverändert bleiben, wenn man zu einer äquivalenten Norm übergeht.

Außerdem verallgemeinern wir die Definition der *Konvergenz*, die wir aus dem ersten Semester für Folgen reeller Zahlen definiert haben, auf Folgen in beliebigen metrischen Räumen. Wie dort ist auch hier das Ziel, der ungenauen Aussage, dass eine Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d_X) sich einem Punkt $a \in X$ „nähert", oder dass der Abstand zwischen $x^{(n)}$ und a „immer kleiner wird", eine präzise Bedeutung zu geben. Auch das Konzept der *Cauchyfolgen*, dass die Feststellung der Konvergenz ohne die Angabe eines Grenzwerts ermöglicht, lässt sich auf die metrischen Räume übertragen. Zum Schluss beweisen wir den sog. *Banachschen Fixpunktsatz*, ein wichtiges Hilfsmittel sowohl für praktische Anwendungen, vor allem numerische Verfahren, als auch für theoretische Herleitungen. Beispielsweise werden wir diesen Satz später beim Kriterium für lokale Umkehrarkeit und implizit definierte Funktionen verwenden, und noch später werden wir ihm in der Theorie der Gewöhnlichen Differenzialgleichungen wieder begegnen.

Wichtige Begriffe und Sätze

- Konvergenz und Grenzwerte in metrischen Räumen
- Cauchyfolgen und Vollständigkeit metrischer Räume
- Definition der p-Norm auf $\mathbb{R}^n$ für $p \in [1, +\infty]$.
- Definition der Äquivalenz von Normen
- Je zwei Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.
- Banachscher Fixpunktsatz

(1.1) Satz Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$ ist für jedes $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ durch

$$\|x\|_p \quad = \quad \sqrt[p]{\textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|^p} \quad , \quad x = (x_1, ..., x_n) \in V$$

eine Norm definiert, die sogenannte ***p-Norm***. Eine weitere Norm erhält man durch

$$\|x\|_\infty \quad = \quad \max\{|x_1|, ..., |x_n|\} \quad , \quad \text{die } \textbf{\textit{Supremumsnorm}}.$$

Beweis: Wir überprüfen zunächst die Normeigenschaften der Supremumsnorm. Offenbar gilt $\|x\|_\infty = 0$ genau dann, wenn $|x_1| = ... = |x_n| = 0$ gilt, und dies wiederum genau dann der Fall, wenn $x = 0_{\mathbb{R}^n}$ ist. Sei nun $x \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Für den Beweis der Gleichung $\|\lambda x\|_\infty = |\lambda|\|x\|_\infty$ sei $i \in \{1, ..., n\}$ so gewählt, dass $|x_i| \geq |x_j|$ für $1 \leq j \leq n$ erfüllt ist. Dann gilt auch $|\lambda x_i| \geq |\lambda x_j|$ für alle j, und es folgt $\|\lambda x\|_\infty = |\lambda x_i| = |\lambda||x_i| = |\lambda|\|x\|_\infty$.

Zum Beweis der Dreiecksungleichung seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ vorgegeben. Für $1 \le i \le n$ gilt jeweils

$$|x_i + y_i| \quad \le \quad |x_i| + |y_i| \quad \le \quad \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \quad ,$$

also auch $\|x + y\|_\infty \le \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$. Damit ist $\| \cdot \|_\infty$ tatsächlich eine Norm auf V.

Wenden wir uns nun dem Beweis der Norm-Eigenschaften für die p-Norm zu, wobei $p \in \mathbb{R}$ und $p \ge 1$ ist. Für jedes $x \in V$ gilt auch hier $\|x\|_p = 0$ genau dann, wenn die Beträge $|x_i|$ der Koordinaten alle gleich Null sind, und dies ist wiederum äquivalent zu $x = 0_{\mathbb{R}^n}$. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\|\lambda x\|_p \quad = \quad \sqrt[p]{\textstyle\sum_{i=1}^n |\lambda x_i|^p} \quad = \quad |\lambda| \sqrt[p]{\textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|^p} \quad = \quad |\lambda| \|x\|_p. \tag{1.2}$$

Also ist auch die zweite Bedingung erfüllt. Der Beweis der Dreiecksungleichung ist leider nur für $p = 1$ einfach. Hier folgt sie durch die Rechung

$$\|x + y\|_1 \quad = \quad \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \quad \le \quad \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| \quad = \quad \|x\|_1 + \|y\|_1. \qquad \square$$

Für den Beweis der Dreiecksungleichung im Fall $p > 1$ benötigen wir als zusätzliches Hilfsmittel die Höldersche Ungleichung. Der Beweis dieser Ungleichung erfordert allerdings ein wenig Vorbereitung.

(1.3) Lemma Seien $p, q \in \mathbb{R}$, $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $x, y \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt

$$x^{1/p} y^{1/q} \quad \le \quad \frac{x}{p} + \frac{y}{q}.$$

Beweis: Wir können voraussetzen, dass $x, y \neq 0$ sind, denn im Fall $x = 0$ oder $y = 0$ ist die Ungleichung offensichtlich erfüllt. Aus Symmetriegründen können wir außerdem $x \ge y$ annehmen, da wir ansonsten die Aussage durch Vertauschung von x und y bzw. p und q auf diesen Fall zurückführen können. Schließlich können wir auch noch $x > y$ voraussetzen, denn im Fall $x = y$ reduziert sich die Aussage auf die offensichtliche Ungleichung $x \le x$.

Dividieren wir die Ungleichung durch y und setzen wir $\xi = \frac{x}{y}$, dann erhalten wir auf der rechten Seite den Term

$$\tfrac{1}{p}\xi + \tfrac{1}{q} \quad = \quad \tfrac{1}{p}\xi + 1 - \tfrac{1}{p} \quad = \quad \tfrac{1}{p}(\xi - 1) + 1 \quad ,$$

auf der linken Seite $x^{1/p} y^{1/q-1} = (\frac{x}{y})^{1/p} y^{1/p+1/q-1} = \xi^{1/p}$. Es genügt also, für jedes reelle $\xi > 1$ die Ungleichung $\xi^{1/p} \le \frac{1}{p}(\xi - 1) + 1$ zuvbeweisen. Setzen wir $\eta = \xi - 1$, so erhalten wir nach Subtraktion von 1 auf beiden Seiten die äquivalente Ungleichung

$$(\eta + 1)^{1/p} - 1 \quad \le \quad \tfrac{1}{p}\eta \qquad \text{für} \quad \eta > 0$$

Diese kann nun durch den Mittelwertsatz der Differentialrechnung bewiesen werden. Dazu betrachten wir die Funktion $\phi(t) = (t + 1)^{1/p}$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, \eta]$. Auf Grund des Mittelwertsatzes gibt es ein $t_0 \in]0, \eta[$ mit $\phi(\eta) - \phi(0) = \eta\phi'(t_0)$. Die linke Seite dieser Gleichung ist gleich $(\eta + 1)^{1/p} - 1$, die rechte Seite ist wegen $\phi'(t) = \frac{1}{p}(t + 1)^{1/p-1}$ gleich $\eta \cdot \frac{1}{p}(t_0 + 1)^{1/p-1}$. Wegen $t_0 + 1 > 1$ und $\frac{1}{p} - 1 < 0$ kann die rechte Seite durch $\frac{1}{p}(t_0 + 1)^{1/p-1} \le \frac{1}{p}\eta$ abgeschätzt werden. $\square$

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung aus der Linearen Algebra lässt sich nun verallgemeinern zu

(1.4) Proposition *(Höldersche Ungleichung)*
Seien $x,y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1,...,x_n)$ und $y = (y_1,...,y_n)$, und seien $p,q \in \mathbb{R}$ mit $p,q > 1$ und $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ vorgegeben. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot |y_i| \quad \leq \quad \|x\|_p \|y\|_q$$

Beweis: Nach Lemmma (1.3), angewendet auf die nicht-negativen Zahlen $\frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p}$ und $\frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$ gilt

$$\frac{|x_i|}{\|x\|_p}\frac{|y_i|}{\|y\|_q} \quad \leq \quad \frac{1}{p}\frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q} \qquad \text{für} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|}{\|x\|_p} \cdot \frac{|y_i|}{\|y\|_q} \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{p}\frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}\right) \quad =$$

$$\frac{1}{p}\frac{1}{\|x\|_p^p}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p + \frac{1}{q}\frac{1}{\|y\|_q^q}\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p \quad = \quad \frac{1}{p}\frac{1}{\|x\|_p^p}\|x\|_p^p + \frac{1}{q}\frac{1}{\|y\|_q^q}\|y\|_q^q \quad = \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q} \quad = \quad 1.$$

Durch Multiplikation dieser Ungleichung mit $\|x\|_p\|y\|_q$ erhalten wir die Höldersche Ungleichung. □

Beweis der Dreiecksungleichung für die p-Norm, für $p > 1$:

Seien $x,y \in \mathbb{R}^n$ vorgegeben. Wir können $x + y \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ annehmen, weil die Dreiecksungleichung ansonsten offensichtlich sogar mit Gleichheit erfüllt ist. Sei $q \in \mathbb{R}$ die eindeutig bestimmte (positive) reelle Zahl mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, nämlich $q = \frac{p}{p-1}$. Außerdem sei $z \in \mathbb{R}^n$ der Vektor mit den Komponenten $z_i = (x_i + y_i)^{p-1}$ für $1 \leq i \leq n$. Es gilt dann

$$\|x+y\|_p^p \quad = \quad \sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{n}|x_i||x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n}|y_i||x_i+y_i|^{p-1} \quad = \quad \sum_{i=1}^{n}|x_i||z_i| + \sum_{i=1}^{n}|y_i||z_i|$$

$$\leq \quad \|x\|_p\|z\|_q + \|y\|_p\|z\|_q \quad = \quad \|x\|_p\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \|y\|_p\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

$$= \quad \|x\|_p\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{(p-1)/p} + \|y\|_p\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{(p-1)/p} \quad = \quad \|x\|_p \cdot \|x+y\|_p^{p-1} + \|y\|_p \cdot \|x+y\|_p^{p-1}$$

wobei im vierten Schritt die Höldersche Ungleichung und im sechsten Schritt die Gleichungen $q = \frac{p}{p-1}$ und $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$ verwendet wurden. Division durch $\|x+y\|_p^{p-1}$ auf beiden Seiten liefert das gewünschte Ergebnis.

Die Verwendung vom Index ∞ bei der Supremumsnorm ist auf Grund der folgenden Beziehung zwischen p-Norm und Supremumsnorm gerechtfertigt.

(1.5) Proposition Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Beweis: Für $x = 0$ ist die Gleichung offensichtlich erfüllt, denn dann gilt $\|x\|_\infty = 0$ und $\|x\|_p = 0$ für alle $p \in \mathbb{N}$. Sei nun $x \neq 0$ und x_k die Komponente von x mit dem größten Betrag. Dann können wir $\|x\|_p$ auch in der Form

$$|x_k| \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|^p}{|x_k|^p} \right)^{1/p}$$

schreiben. Die Summe in der Klammer kann nach unten abgeschätzt werden durch $\frac{|x_k|^p}{|x_k|^p} = 1$, und nach oben wegen $\frac{|x_i|^p}{|x_k|^p} \leq 1$ für $1 \leq i \leq n$ durch den Wert n. Für jedes p gilt also jeweils $|x_k| \leq \|x\|_p \leq |x_k| \cdot \sqrt[p]{n}$. Wegen

$$\lim_{p\to+\infty} |x_k| \cdot \sqrt[p]{n} \quad = \quad |x_k| \cdot \lim_{p\to+\infty} \sqrt[p]{n} \quad = \quad |x_k| \cdot \lim_{p\to+\infty} e^{\frac{\ln(n)}{p}} \quad = \quad |x_k| \cdot e^0 \quad = \quad |x_k|$$

folgt nun aus dem Sandwich-Lemma, dass auch $\|x\|_p$ für $p \to +\infty$ gegen $|x_k| = \|x\|_\infty$ konvergiert. □

Häufig lassen sich Normen durch eine Konstante gegeneinander abschätzen. So gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ zum Beispiel

$$\|x\|_2 \quad = \quad \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2} \quad \leq \quad (n|x_i|^2)^{1/2} \quad = \quad \sqrt{n}\|x\|_\infty \quad ,$$

wobei x_i wieder eine Komponente von x mit maximalem Betrag $|x_i|$ bezeichnet. Eine ebenso einfache Rechnung zeigt $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$. Zwischen der 1- und der Supremumsnorm hat man die Abschätzungen $\|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$ und $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$.

(1.6) Definition Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V werden als ***äquivalent*** bezeichnet, wenn reelle Konstanten $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ mit der Eigenschaft

$$\gamma_1\|x\| \quad \leq \quad \|x\|' \quad \leq \quad \gamma_2\|x\| \qquad \text{für alle } x \in V \text{ existieren.}$$

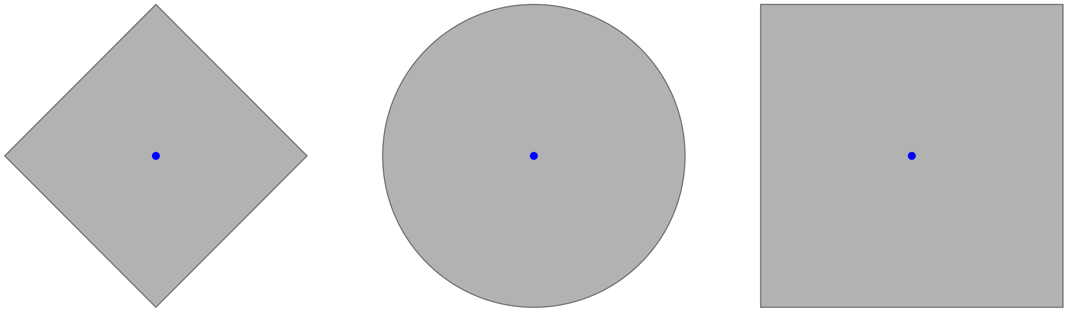
Offenbar gleichwertig mit dieser Bedingung ist die Existenz von reellen Konstanten $\delta_1, \delta_2 > 0$ mit $\|x\| \leq \delta_1\|x\|'$ und $\|x\|' \leq \delta_2\|x\|$ für alle $x \in V$.

Es ist nicht schwer zu sehen, dass jede Norm auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V zu sich selbst äquivalent ist. Ist eine Norm $\|\cdot\|$ auf V äquivalent zu $\|\cdot\|'$, dann ist auch $\|\cdot\|'$ äquivalent zu $\|\cdot\|$. Sind $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$, $\|\cdot\|''$ drei Normen auf V, wobei $\|\cdot\|$ äquivalent zu $\|\cdot\|'$ und $\|\cdot\|'$ äquivalent zu $\|\cdot\|''$, dann ist auch $\|\cdot\|$ äquivalent zu $\|\cdot\|''$. Die Ausarbeitung der Details ist eine leichte Übungsaufgabe. Man fast die drei Aussagen zusammen in der Feststellung, dass durch den Begriff der Äquivalenz auf der Menge der Normen von V eine ***Äquivalenzrelation*** gegeben ist.

Dem Begriff der Äquivalenz lässt sich folgendermaßen eine anschauliche Bedeutung geben. Für alle $r \in \mathbb{R}^+$ und $a \in V$ bezeichnen wir mit

$$B_{\|\cdot\|,r}(a) \quad = \quad \{x \in V \mid \|x-a\| < r\} \qquad \text{bzw.} \qquad \bar{B}_{\|\cdot\|,r}(a) \quad = \quad \{x \in V \mid \|x-a\| \leq r$$

den ***offenen*** bzw. ***abgeschlossenen Ball*** vom Radius r um den Punkt a bezüglich der Norm $\|\cdot\|$. Ebenso definieren wir $B_{\|\cdot\|',r}$ und $\bar{B}_{\|\cdot\|',r}$ für die Norm $\|\cdot\|'$. Die folgende Graphik zeigt die abgeschlossenen Bälle einiger Normen auf dem $\mathbb{R}^2$, wobei der blaue Punkt jeweils den Koordinatenursprung kennzeichnet.



$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_1 \leq 1\}$ $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \leq 1\}$ $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_\infty \leq 1\}$

(1.7) Proposition Sei $\delta \in \mathbb{R}^+$. Dann ist die Ungleichung $\|x\|' \leq \delta\|x\|$ für alle $x \in V$ gleichbedeutend mit $B_{\|\cdot\|,r}(a) \subseteq B_{\|\cdot\|',\delta r}(a)$ für $a \in V$ und $r \in \mathbb{R}^+$. Eine entsprechende Aussage gilt auch für die abgeschlossenen Bälle.

Beweis: Wir beschränken uns darauf, die Äquivalenzaussage für die offenen Bälle zu beweisen.

„$\Rightarrow$“ Setzen wir $\|x\|' \leq \delta\|x\|$ für alle $x \in V$ voraus. Ist nun $x \in B_{\|\cdot\|,r}(a)$ vorgegeben, dann gilt $\|x-a\| < r$, damit $\delta\|x-a\| < \delta r$ und $\|x-a\|' < \delta r$. Es folgt $x \in B_{\|\cdot\|',\delta r}(a)$.

„$\Leftarrow$“ Nehmen wir an, dass $B_{\|\cdot\|,r}(a) \subseteq B_{\|\cdot\|',\delta r}(a)$ für alle $r \in \mathbb{R}^+$ und $a \in V$ erfüllt ist, zugleich aber ein $x \in V$ mit $\|x\|' > \delta\|x\|$ existiert. Setzen wir $r = \|x\|'$, dann gilt $\|\delta x\| = \delta\|x\| < r$ und somit $\delta x \in B_{\|\cdot\|,r}(0_V)$. Andererseits ist $\|x\|' = r$, also $\|\delta x\|' = \delta r$ und damit $\delta x \notin \mathrm{B}_{\|\cdot\|',\delta r}(0_V)$. Dies steht zur angenommenen Inklusion im Widerspruch. $\square$

Dem folgenden Resultat hat für die Analysis endlich-dimensionaler Vektorräume eine zentrale Bedeutung.

(1.8) Satz Auf jedem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V sind je zwei Normen äquivalent.

Beweis: Seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ zwei Normen auf V. Beim Nachweis der Äquivalenz beschränken wir uns zunächst auf den Fall $V = \mathbb{R}^d$, für beliebiges $d \in \mathbb{N}$. Es genügt zu zeigen, dass $\|\cdot\|$ äquivalent zur 1-Norm $\|\cdot\|_1$ ist. Weil $\|\cdot\|$ nämliche eine beliebig gewählte Norm ist, folgt aus dem Beweis dann auch die Äquivalenz von $\|\cdot\|'$ und $\|\cdot\|_1$, und auf Grund der Bemerkungen von oben erhalten wir somit insgesamt die Äquivalenz von $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$.

Sei $\delta_1 = \max\{\|e_1\|, ..., \|e_d\|\}$, wobei $e_i \in \mathbb{R}^d$ jeweils den i-ten Einheitsvektor bezeichnet. Für einen beliebigen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v = (v_1, ..., v_n)$ gilt dann

$$\|v\| \quad = \quad \left\|\sum_{i=1}^{d} v_i e_i\right\| \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{d} |v_i|\|e_i\| \quad \leq \quad \delta_1 \sum_{i=1}^{d} |v_i| \quad = \quad \delta_1\|v\|_1.$$

Um zu zeigen, dass auch eine Konstante δ_2 mit der Eigenschaft $\|v\|_1 \leq \delta_2\|v\|$ existiert, betrachten wir die Menge $S = \{w \in \mathbb{R}^d \mid \|w\|_1 = 1\}$ und definieren $\gamma = \inf\{\, \|w\| \mid w \in S\}$. Angenommen, wir können zeigen, dass $\gamma > 0$ ist. Für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^d$, $v \neq 0_{\mathbb{R}^d}$ ist $w = \|v\|_1^{-1} v$ in S enthalten, es gilt also $\|v\|_1^{-1}\|v\| = \|w\| \geq \gamma$ und somit $\|v\|_1 \leq \gamma^{-1}\|v\|$. Im Fall $v = 0_{\mathbb{R}^d}$ ist die Ungleichung $\|v\|_1 \leq \gamma^{-1}\|v\|$ offenbar auch erfüllt. Setzen wir also $\delta_2 = \gamma^{-1}$, dann gilt $\|v\|_1 \leq \delta_2\|v\|$ für alle $v \in \mathbb{R}^d$, und die Äquivalenz der beiden Normen ist damit bewiesen.

Die Ungleichung $\gamma > 0$ erhalten wir durch den folgenden Widerspruchsbeweis. Angenommen, es ist $\gamma = 0$. Dann gibt es eine Folge $(w^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ von Vektoren $w^{(n)} \in S$ mit $\lim_n \|w^{(n)}\| = 0$. Wegen $\|w^{(n)}\|_1 = 1$ gilt jeweils $|w_i^{(n)}| \le 1$ für die Komponenten von $w^{(n)}$ (für alle $n \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le d$). Insbesondere die Folge $(w_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist also ganz im Intervall $[-1,1]$ enthalten. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß aus der Analysis einer Variablen gibt es eine Teilfolge von $(w_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen eine Zahl $a_1 \in \mathbb{R}$ konvergiert. Durch Übergang zu einer Teilfolge von $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ können wir also erreichen, dass $\lim_n w_1^{(n)} = a_1$ erfüllt ist. Indem wir die Folge noch weiter ausdünnen, können wir sogar

$$\lim_{n\to\infty} w_i^{(n)} \quad = \quad a_i \qquad \text{für} \quad 1 \le i \le d \quad \text{annehmen.}$$

Setzen wir $a = (a_1, ..., a_d) \in \mathbb{R}^d$, so folgt $\lim_n \|a - w^{(n)}\|_1 = \lim_n \sum_{i=1}^d |a_i - w_i^{(n)}| = 0$. Aus $w^{(n)} \in S$ folgt nun einerseits $\|w^{(n)}\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit auch

$$\|a\|_1 \quad = \quad \sum_{i=1}^{d} |a_i| \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{d} |w_i^{(n)}| \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \|w^{(n)}\|_1 \quad = \quad 1.$$

Also ist auch a in S enthalten. Betrachten wir andererseits für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $\|a\| \le \|a - w^{(n)}\| + \|w^{(n)}\| \le \delta_1 \|a - w^{(n)}\|_1 + \|w^{(n)}\|$ und lassen wir n gegen Unendlich laufen, so folgt $\|a\| = 0$. Auf Grund der Norm-Eigenschaft von $\|\cdot\|$ müsste $a = 0_{\mathbb{R}^d}$ gelten. Aber in diesem Fall kann a kein Element von S sein, denn es gilt $\|0_{\mathbb{R}^d}\|_1 = 0$. Wir haben die Annahme $\gamma = 0$ auf einen Widerspruch geführt. Damit ist der Beweis für $V = \mathbb{R}^d$ insgesamt abgeschlossen.

Sei nun V ein beliebiger d-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, und seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ zwei Normen auf V. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass je zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume derselben Dimension isomorph sind. Es gibt also einen Isomorphismus $\phi : V \to \mathbb{R}^d$ von $\mathbb{R}$-Vektorräumen. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass sich eine Norm durch einen Vektorraum-Isomorphismus von einem $\mathbb{R}$-Vektorraum auf einen anderen übertragen lässt. Demnach sind durch $\|v\|_* = \|\phi^{-1}(v)\|$ und $\|v\|'_* = \|\phi^{-1}(v)\|'$ Normen auf $\mathbb{R}^d$ definiert. Wie wir bereits gezeigt haben, sind zwei Normen auf $\mathbb{R}^d$ äquivalent, also gibt es Konstanten $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $\|v\|'_* \le \delta_1 \|v\|_*$ und $\|v\|_* \le \delta_2 \|v\|'_*$ für alle $v \in \mathbb{R}^d$. Für ein beliebig vorgegebenes $v \in V$ gilt dann

$$\|v\|' \quad = \quad \|\phi(v)\|'_* \quad \le \quad \delta_1 \|\phi(v)v\|_* \quad = \quad \delta_1 \|v\|.$$

Genauso beweist man die Abschätzung $\|v\| \le \delta_2 \|v\|'$. □

Genau wie bei den normierten Vektorräumen definieren wir

(1.9) Definition Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für jeden Punkt $x \in X$ und jede Zahl $r \in \mathbb{R}^+$ bezeichnet man $B_r(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$ bzw. $\bar{B}_r(x) = \{y \in X \mid d(x,y) \le r\}$ als den ***offenen*** bzw. den ***abgeschlossenen Ball*** vom Radius r um den Punkt x.

Ist speziell $V = \mathbb{R}^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$ und $\|\cdot\| = \|\cdot\|_p$ für ein $p \in \mathbb{R}$ mit $p \ge 1$ oder $p = \infty$, dann bezeichnen wir die induzierte Metrik mit d_p. Ein wichtiger Spezialfall ist die von jeder p-Norm auf $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ induzierte Metrik gegeben durch $d(x,y) = |x - y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$, die wir auch als ***Standardmetrik*** auf $\mathbb{R}$ bezeichnen.

Allgemein wird nicht jede Metrik von einer Norm induziert, selbst dann nicht, wenn die unterliegende Menge X Teilmenge eines $\mathbb{R}$-Vektorraums ist. Wir betrachten dazu das folgende Beispiel.

(1.10) Definition Auf jeder Menge X ist die ***diskrete Metrik*** δ_X folgendermaßen definiert: Für alle $x \in X$ ist $\delta_X(x,x) = 0$, und für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ setzt man $\delta_X(x,y) = 1$.

Dass es sich bei δ_X tatsächlich um eine Metrik handelt, kann leicht überprüft werden. Ist nun V ein mindestens eindimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, dann wird δ_V nicht durch eine Norm $\|\cdot\|$ auf V induziert. Denn nehmen wir an, dies wäre doch der Fall. Für einen beliebigen Vektor $v \neq 0_V$ gilt dann $\delta_V(v, 0_V) = \|v\|$ und $\delta_V(2v, 0_V) = \|2v\| = 2\|v\|$. Aus der ersten Gleichung und der Definition der diskreten Metrik folgt dann $\|v\| = \delta_V(v, 0_V) = 1$. Durch erneute Anwendung der Definition erhalten wir dann aber den Widerspruch $1 = \delta_V(2v, 0_V) = \|2v\| = 2\|v\| = 2$.

Für das Verständnis ist es auch hilfreich sich zu überlegen, wie die offenen bzw. abgeschlossenen Bälle bezüglich der diskreten Metrik auf einer Menge X aussehen: Für alle $x \in X$ und $r < 1$ ist $B_r(x) = \bar{B}_r(x) = \{x\}$. Für $r = 1$ gilt $B_r(x) = \{x\}$ und $\bar{B}_r(x) = X$. Im Fall $r > 1$ gilt schließlich $B_r(x) = \bar{B}_r(x) = X$.

In der Analysis einer Variablen haben wir die Schreibweise $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für Folgen reeller Zahlen verwendet. Als mathematisches Objekt ist eine solche Folge lediglich eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Unter einer Folge in einem metrischen Raum (X,d) verstehen wir nun entsprechend eine Abbildung $\mathbb{N} \to X$ und verwenden für solche Folgen Bezeichnungen der Form $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Den Index n des Folgengliedes setzen wir nach oben, da es sich bei unseren metrischen Räumen oft um Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ handelt und wir den unteren Index zur Bezeichnung der Komponenten des Vektors benötigen. Die Komponenten eines Folgenglieds $x^{(n)}$ im Vektorraum $\mathbb{R}^m$ bezeichnen wir üblicherweise mit $x_k^{(n)}$ für $1 \leq k \leq m$. In dieser Schreibweise gilt dann $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, ..., x_m^{(n)})$.

(1.11) Definition Sei (X,d) ein metrischer Raum, $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und $a \in X$ ein Punkt. Man sagt, die Folge ***konvergiert*** in (X,d) gegen a und schreibt

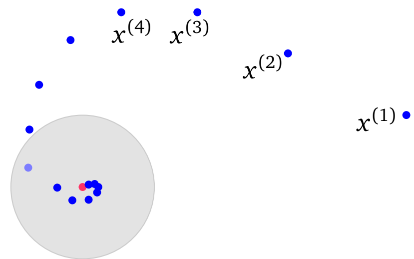
$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a \quad ,$$

wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x^{(n)} \in B_\varepsilon(a)$ für alle $n \geq N$ gilt. Der Punkt a wird in diesem Fall ein ***Grenzwert*** der Folge genannt. Eine Folge, die gegen keinen Punkt von X konvergiert, bezeichnet man als ***divergent***.

Nach Definition ist die Bedingung $x \in B_\varepsilon(a)$ äquivalent zu $d(a,x) < \varepsilon$. Die Konvergenz der Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist also äquivalent dazu, dass

$$\lim_{n\to\infty} d(a, x^{(n)}) = 0 \quad \text{gilt.} \tag{1.12}$$

Die folgende Abbildung zeigt, wie man sich die Konvergenz im $\mathbb{R}^2$ aussehen könnte: Egal wie klein die graue Umgebung des rot eingezeichneten Grenzpunktes a gewählt wird, es liegen immer alle bis auf endlich viele Punkte innerhalb der Umgebung und nur endlich viele außerhalb.



Im speziellen metrischen Raum $(\mathbb{R}, d_1)$ ist die Konvergenz einer Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Punkt $a \in \mathbb{R}$ gleichbedeutend mit der Konvergenz, wie wir sie in der Analysis einer Variablen definiert haben. In diesem Fall hat die Bedingung (1.12) einfach die Form $\lim_n |x^{(n)} - a| = 0$. Wie in der Analysis einer Variablen gilt auch hier

(1.13) Proposition Jede Folge in einem metrischen Raum hat höchstens einen Grenzwert.

Beweis: Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Nehmen wir an, dass die Folge in (X, d) die beiden Grenzwerte $a, b \in X$ besitzt, wobei $a \neq b$ ist. Sei $\varepsilon = d(a, b)$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass zugleich $d(x^{(n)}, a) < \frac{1}{2}\varepsilon$ und $d(x^{(n)}, b) < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $n \geq N$ erfüllt ist. Dies führt nun zu dem Widerspruch

$$\varepsilon \quad = \quad d(a,b) \quad \leq \quad d(a, x^{(N)}) + d(x^{(N)}, b) \quad < \quad \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad = \quad \varepsilon. \qquad \square$$

Bezüglich der diskreten Metrik lässt sich die Konvergenz einer Folge besonders einfach beschreiben.

(1.14) Proposition Sei X eine beliebige Menge. Eine Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum (X, δ_X) ausgestattet mit der diskreten Metrik konvergiert genau dann gegen einen Punkt $a \in X$, wenn ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x^{(n)} = a$ für alle $n \geq N$ existiert.

Beweis: „$\Leftarrow$“ Sei N eine natürliche Zahl mit der angegebenen Eigenschaft und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Für alle $n \geq N$ gilt dann $\delta_X(x^{(n)}, a) = \delta_X(a, a) = 0 < \varepsilon$, also ist die Konvergenzbedingung erfüllt. „$\Rightarrow$“ Nach Voraussetzung gibt es für $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\delta_X(x^{(n)}, a) < 1$ für alle $n \geq N$ gilt. Weil δ_X nur die Werte 0 und 1 annimmt, ist $\delta_X(x^{(n)}, a) = 0$ für alle $n \geq N$. Nach Definition der diskreten Metrik bedeutet dies $x^{(n)} = a$ für alle $n \geq N$. $\square$

(1.15) Proposition Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit zwei äquivalenten Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$, und seien d, d' die beiden von den Normen induzierten Metriken. Sei $a \in V$ und $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Genau dann konvergiert die Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a im metrischen Raum (V, d), wenn sie im metrischen Raum (V, d') gegen a konvergiert.

Beweis: Nach Definition der Äquivalenz gibt es Konstanten $\delta, \delta' \in \mathbb{R}^+$ mit $\|v\|' \leq \delta\|v\|$ und $\|v\| \leq \delta'\|v\|'$ für alle $v \in V$. Aus Symmetriegründen genügt es zu zeigen: Konvergiert $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ im Raum (V, d) gegen a, dann auch im Raum (V, d'). Setzen wir ersteres also voraus. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|x^{(n)} - a\| = d(x^{(n)}, a) < \delta^{-1}\varepsilon$ für alle $n \geq N$. Es folgt dann

$$d'(x^{(n)}, a) \quad = \quad \|x^{(n)} - a\|' \quad \leq \quad \delta\|x^{(n)} - a\| \quad < \quad \delta\delta^{-1}\varepsilon \quad = \quad \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

Dies zeigt, dass $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum (X, d') konvergiert. $\square$

Nach Satz (1.8) sind je zwei Normen auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum äquivalent. Sei V ein solcher Vektorraum, $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm, d die induzierte Metrik und $X \subseteq V$ eine Teilmenge. Bezeichnen wir die Einschränkung der Abbildung d auf die Teilmenge $X \times X \subseteq V \times V$ ebenfalls mit d, so ist (X,d) ein metrischer Raum. Eine Folge in X bezeichnen wir als ***konvergent*** gegen einen Punkt $a \in X$, wenn sie im metrischen Raum (X,d) gegen a konvergiert. Nach Proposition (1.15) ist diese Definition von der Wahl der Norm $\|\cdot\|$ unabhängig.

(1.16) Satz Sei $m \in \mathbb{N}$. Eine Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^m$ konvergiert genau dann gegen einen Punkt $a \in \mathbb{R}^m$, wenn $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = a_k$ für $1 \le k \le m$ erfüllt ist.

Beweis: „$\Leftarrow$" Wie im Absatz zuvor erläutert wurde, genügt es zu zeigen, dass $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum $(\mathbb{R}^m, d_\infty)$ gegen a konvergiert. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Auf Grund der Voraussetzung gibt es für jedes $k \in \{1,...,m\}$ ein $N_k \in \mathbb{N}$, so dass jeweils $|x_k^{(n)} - a_k| < \varepsilon$ für alle $n \ge N_k$ erfüllt ist. Setzen wir $N = \max\{N_1,...,N_m\}$, dann gilt für alle $n \ge N$ die Abschätzung

$$d_\infty(x^{(n)},a) \quad = \quad \|x^{(n)} - a\|_\infty \quad = \quad \max\{|x_1^{(n)} - a_1|,...,|x_m^{(n)} - a_m|\} \quad < \quad \varepsilon.$$

Nach Definition bedeutet das, dass $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum $(\mathbb{R}^m, d_\infty)$ konvergiert.

„$\Rightarrow$" Sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die im metrischen Raum $(\mathbb{R}^m, d_\infty)$ gegen a konvergiert. Zu zeigen ist $\lim_n x_k^{(n)} = a_k$ für $1 \le k \le m$. Sei dazu $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben und $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $d_\infty(x^{(n)},a) < \varepsilon$ für alle $n \ge N$ gilt. Dann folgt

$$|x_k^{(n)} - a_k| \quad \le \quad \max\{|x_1^{(n)} - a_1|,...,|x_m^{(n)} - a_m|\} \quad = \quad \|x^{(n)} - a\|_\infty \quad = \quad d_\infty(x^{(n)},a) \quad < \quad \varepsilon$$

für alle $n \ge N$ und $1 \le k \le m$. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Beispielsweise ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^2$ gegeben durch $a_n = (\frac{1}{n}, (-1)^n)$ divergent, weil die zweite Komponente $(-1)^n$ der Folge divergiert. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$b_n = \left(1 + \frac{2}{n}, \frac{3n^2 - 7n + 6}{4n^2 - 5}\right)$$

ist dagegen konvergent, es gilt

$$\lim_{n\to\infty} b_n \quad = \quad \left(\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n}\right), \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 7n + 6}{4n^2 - 5}\right) \quad = \quad (1, \tfrac{3}{4}).$$

(1.17) Definition Eine Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ein einem metrischen Raum (X,d) wird ***Cauchyfolge*** genannt, wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $d(x^{(m)}, x^{(n)}) < \varepsilon$ für alle $m,n \in \mathbb{N}$ mit $m,n \ge N$ gilt.

Der Beweis der folgenden Aussage ist dem Beweis von Proposition (1.15) über die Konvergenz sehr ähnlich.

(1.18) Proposition Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit zwei äquivalenten Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$, und seien d, d' die beiden von den Normen induzierten Metriken. Sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Genau dann ist die Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (V,d), wenn sie eine Cauchyfolge in (V,d') ist.

Da je zwei Normen auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V äquivalent sind, können wir in Teilmengen $X \subseteq V$ von Cauchyfolgen schlechthin sprechen, ohne Festlegung einer Metrik. Gemeint ist dann immer die Cauchyfolgen-Eigenschaft bezüglich der von einer (beliebig gewählten) Norm induzierten Metrik.

Jede konvergente Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X,d) mit einem Grenzwert $a \in X$ ist auch eine Cauchyfolge. Sei nämlich $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben und $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $d(x^{(n)}, a) < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $n \geq N$ erfüllt ist. Dann folgt $d(x^{(m)}, x^{(n)}) \leq d(x^{(m)}, a) + d(a, x^{(n)}) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$.

Andererseits gibt es in einigen metrischen Räumen durchaus Cauchyfolgen, die nicht konvergieren. Als Beispiel betrachten wir $(\mathbb{Q}, d)$ mit der Metrix $d(a,b) = |a-b|$. Aus der Analysis einer Variablen ist bekannt, dass jede (rationale oder irrationale) Zahl als Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen dargestellt werden kann. Zum Beispiel gibt es eine Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$, die gegen $\sqrt{2}$ (im gewöhnlichen Sinn) konvergiert. Diese Folge ist in $(\mathbb{Q}, d)$ eine Cauchyfolge, denn für vorgegebenes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ können wir ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x^{(n)} - \sqrt{2}| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $n \geq N$ finden, und es gilt dann $d(x^{(m)}, x^{(n)}) = |x^{(m)} - x^{(n)}| \leq |x^{(m)} - \sqrt{2}| + |\sqrt{2} - x^{(n)}| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $m, n \geq N$. Aber andererseits ist $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum $(\mathbb{Q}, d)$ nicht konvergent, denn das würde bedeutet, dass $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ zwei verschiedene reelle Grenzwerte im gewöhnlichen Sinn besitzen würde, nämlich neben $\sqrt{2}$ noch einen rationalen. Dies ist, wie wir bereits aus der Analysis einer Variablen wissen, unmöglich.

(1.19) Definition Ein metrischer Raum (X,d) heißt ***vollständig***, wenn jede Cauchyfolge in (X,d) konvergiert. Ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, der vollständig bezüglich der induzierten Metrik ist, wird ***Banachraum*** genannt.

In endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräumen ist diese Bedingung immer erfüllt.

(1.20) Satz Jeder normierte, endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.

Beweis: Zunächst betrachten wir den Fall $V = \mathbb{R}^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$. Sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in V. Dann ist $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ insbesondere eine Cauchyfolge im metrischen Raum $(\mathbb{R}^d, d_\infty)$. Wir zeigen, dass die Folgen $(x_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ für $1 \leq k \leq d$ Cauchyfolgen im Sinne der Analysis einer Variablen sind. Sei dazu $k \in \{1, ..., d\}$ beliebig gewählt und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Weil $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $d_\infty(x^{(m)}, x^{(n)}) < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$ erfüllt ist. Es folgt

$$|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}| \quad \leq \quad \max\{|x_1^{(m)} - x_1^{(n)}|, ..., |x_d^{(m)} - x_d^{(n)}|\} \quad = \quad \|x^{(m)} - x^{(n)}\|_\infty \quad = \quad d_\infty(x^{(m)}, x^{(n)}) \quad < \quad \varepsilon$$

für alle $m, n \geq N$. Also ist jede Folge $(x_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}})$ tatsächlich eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$. Aus der Analysis einer Variablen ist bekannt, dass jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ konvergiert. Es gibt also $a_1, ..., a_d \in \mathbb{R}$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} \quad = \quad a_k \qquad \text{für} \quad 1 \leq k \leq d$$

erfüllt ist. Nach Satz (1.16) konvergiert die Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum $(\mathbb{R}^d, d_\infty)$ gegen den Punkt $a = (a_1, ..., a_d)$.

Sei nun V ein beliebiger endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Wegen Proposition (1.15) und Proposition (1.18) genügt es zu zeigen, dass V bezüglich irgendeiner Norm vollständig ist, die wir frei wählen können. Weil $d = \dim V$ endlich ist, gibt es einen Isomorphismus $\phi : \mathbb{R}^d \to V$ von $\mathbb{R}$-Vektorräumen, und durch $\|v\| = \|\phi^{-1}(v)\|_\infty$ ist auf V eine Norm definiert. Sei nun $(y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in V bezüglich der durch $\|\cdot\|$ induzierten Metrik, die wir mit d_V bezeichnen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $x^{(n)} = \phi^{-1}(y^{(n)})$. Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$d_\infty(x^{(m)}, x^{(n)}) \quad = \quad d_\infty(\phi^{-1}(y^{(m)}), \phi^{-1}(y^{(n)})) \quad = \quad \|\phi^{-1}(y^{(m)}) - \phi^{-1}(y^{(n)})\|_\infty \quad =$$

$$\|y^{(m)} - y^{(n)}\| \quad = \quad d_V(y^{(m)}, y^{(n)})$$

nach Definition, also ergibt sich aus der Cauchyfolgen-Eigenschaft von $(y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in (V, d_V) dieselbe Eigenschaft für die Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in $(\mathbb{R}^d, d_\infty)$. Wie bereits gezeigt, konvergiert die Cauchyfolge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in $(\mathbb{R}^d, d_\infty)$ gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}^d$. Sei nun $b = \phi(a) \in V$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$d_\infty(x^{(n)}, a) \quad = \quad d_\infty(\phi^{-1}(y^{(n)}), \phi^{-1}(b)) \quad = \quad \|\phi^{-1}(y^{(n)}) - \phi^{-1}(b)\|_\infty \quad = \quad \|y^{(n)} - b\| \quad = \quad d_V(y^{(n)}, b).$$

Aus der Konvergenz von $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a im metrischen Raum $(\mathbb{R}^d, d_\infty)$ ergibt sich also die Konvergenz von $(y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen b in (V, d_V). □

Wir betrachten nun eine wichtige Situation, in der die Vollständigkeit eines metrischen Raumes verwendet wird.

(1.21) Definition Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $\phi : X \to X$ wird ***Kontraktion*** genannt, wenn eine Konstante $\gamma \in \,]0,1[$ existiert, so dass $d(\phi(x), \phi(y)) \le \gamma d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ erfüllt ist.

Diese Eigenschaft einer Abbildung ist entscheidend für den

(1.22) Satz *(Banachscher Fixpunktsatz)*

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann besitzt jede Kontraktion $\phi : X \to X$ genau einen Fixpunkt. Es gibt also ein eindeutig bestimmtes $z \in X$ mit $\phi(z) = z$.

Beweis: *Existenz:* Sei $\gamma \in \mathbb{R}^+$ eine Konstante mit $\gamma < 1$ und $d(\phi(x), \phi(y)) \le \gamma d(x, y)$ für alle $x, y \in X$. Wir wählen $x^{(0)} \in X$ beliebig und definieren rekursiv $x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Als erstes schätzen wir nun die Abstände $d(x^{(n)}, x^{(n+p)})$ für beliebige $n, p \in \mathbb{N}$ ab. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$d(x^{(n+1)}, x^{(n+2)}) \quad = \quad d(\phi(x^{(n)}), \phi(x^{(n+1)})) \quad \le \quad \gamma d(x^{(n)}, x^{(n+1)}) \quad ,$$

und durch vollständige Induktion über p zeigt man leicht

$$d(x^{(n+p)}, x^{(n+p+1)}) \quad \le \quad \gamma^p d(x^{(n)}, x^{(n+1)}).$$

Mit der Summenformel $\sum_{k=0}^{p-1} \gamma^k = (1-\gamma^p)/(1-\gamma)$ aus der Analysis einer Variablen und der Dreiecksungleichung erhalten wir für alle $p \in \mathbb{N}$ jeweils

$$d(x^{(n)}, x^{(n+p)}) \quad \le \quad \sum_{k=0}^{p-1} d(x^{(n+k)}, x^{(n+k+1)}) \quad \le \quad \sum_{k=0}^{p-1} \gamma^k d(x^{(n)}, x^{(n+1)}) \quad =$$

$$\frac{1-\gamma^p}{1-\gamma} d(x^{(n)}, x^{(n+1)}) \quad \le \quad \frac{1}{1-\gamma} d(x^{(n)}, x^{(n+1)}) \quad \le \quad \frac{\gamma^n}{1-\gamma} d(x^{(0)}, x^{(1)}).$$

Wegen $\lim_n \gamma^n = 0$ ist $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ somit eine Cauchyfolge in X. Auf Grund der Vollständigkeit von (X,d) existiert der Grenzwert $z = \lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)}$.

Um zu zeigen, dass z ein Fixpunkt von ϕ ist, beweisen wir, dass die Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ auch gegen $\phi(z)$ konvergiert. Ist $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x^{(n)}, z) < \varepsilon$ für alle $n \ge N$. Daraus folgt

$$d(x^{(n+1)}, \phi(z)) \quad = \quad d(\phi(x^{(n)}), \phi(z)) \quad \le \quad \gamma d(x^{(n)}, z) \quad < \quad \gamma\varepsilon \quad < \quad \varepsilon$$

für alle $n \ge N$. Es folgt $\phi(z) = \lim_n x^{(n+1)} = \lim_n x^{(n)} = z$.

Eindeutigkeit: Angenommen, $z' \in X$ ist ein weiterer Fixpunkt von ϕ. Aus $\phi(z) = z$ und $\phi(z') = z'$ folgt dann $d(z,z') = d(\phi(z), \phi(z')) \le \gamma d(z,z')$. Wegen $\gamma < 1$ ist dies nur für $d(z,z') = 0$, also $z = z'$, möglich. □

(1.23) Proposition Für den Abstand der Folgenglieder zum Fixpunkt z hat man die „a priori"-Abschätzung

$$d(x^{(n)}, z) \quad \le \quad \frac{\gamma^n}{1-\gamma} d(x^{(0)}, x^{(1)}).$$

Beweis: Es gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} d(x^{(n)}, z) \quad &\le \quad d(x^{(n)}, x^{(n+1)}) + d(x^{(n+1)}, z) \quad = \quad d(x^{(n)}, x^{(n+1)}) + d(\phi(x^{(n)}), \phi(z)) \\ &\le \quad \gamma^n d(x^{(0)}, x^{(1)}) + \gamma d(x^{(n)}, z) \quad , \end{aligned}$$

was zu $(1-\gamma) d(x^{(n)}, z) \le \gamma^n d(x^{(0)}, x^{(1)}) \Leftrightarrow d(x^{(n)}, z) \le \frac{\gamma^n}{1-\gamma} d(x^{(0)}, x^{(1)})$ umgeformt werden kann. □

Als Anwendungsbeispiel setzen wir uns zum Ziel, den Wert von $\sqrt{2}$ numerisch durch Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes mit hoher Genauigkeit zu bestimmen. Der naheliegende Ansatz, $\sqrt{2}$ als Fixpunkt der Abbildung $\phi(x) = \frac{2}{x}$ zu betrachten, führt nicht zum Ziel, weil diese Abbildung in einer Umgebung von $\sqrt{2}$ keine Kontraktion ist. Statt dessen definieren wir $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ durch $\phi(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$. Die Zahl $\sqrt{2}$ ist auch ein Fixpunkt dieser Abbildung, wie die Rechnung $\phi(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2}) = \frac{1}{2}(2\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ zeigt.

Zunächst betrachten wir die Funktion ϕ auf dem Intervall $X = [1, \frac{3}{2}]$. Es gilt $\phi'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$. Auf dem offenen Intervall $]1, \frac{3}{2}[$ gilt die Abschätzung

$$-\tfrac{1}{2} \quad = \quad \phi'(1) \quad < \quad \phi'(x) \quad < \quad \tfrac{1}{18} \quad = \quad \phi'(\tfrac{3}{2})$$

und somit $|\phi'(x)| < \frac{1}{2}$ für alle $x \in]1, \frac{3}{2}[$. Seien nun $x, y \in [1, \frac{3}{2}]$ vorgegeben. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechung gibt es ein $x_0 \in]1, \frac{3}{2}[$ mit

$$\phi'(x_0) = \frac{\phi(x) - \phi(y)}{x - y} \quad \Leftrightarrow \quad \phi(x) - \phi(y) = \phi'(x_0)(x - y).$$

Es folgt $|\phi(x) - \phi(y)| = |\phi'(x_0)||x - y| \le \frac{1}{2}|x - y|$.

Wählen wir nun $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $\varepsilon \le \frac{3}{2} - \sqrt{2}$, und setzen wir $X = [\sqrt{2} - \varepsilon, \sqrt{2} + \varepsilon]$, dann bildet ϕ die Menge X in sich ab und definiert auf X eine Kontraktion, mit Kontraktionskonstante $\gamma = \frac{1}{2}$. Denn wie wir oben gezeigt haben, gilt $|\phi(x) - \phi(y)| \le \frac{1}{2}|x - y|$ für alle $x, y \in [1, \frac{3}{2}]$, also erst recht für alle $x, y \in X$. Ist nun $x \in X$ vorgegeben, dann gilt $|x - \sqrt{2}| \le \varepsilon$ und somit $|\phi(x) - \sqrt{2}| = |\phi(x) - \phi(\sqrt{2})| \le \frac{1}{2}|x - \sqrt{2}| \le \frac{1}{2}\varepsilon$, also $\sqrt{2} - \frac{1}{2}\varepsilon \le \phi(x) \le \sqrt{2} + \frac{1}{2}\varepsilon$ und damit auch $\phi(x) \in X$. Wie wir später sehen werden, sind abgeschlossene Teilmengen vollständiger metrischer Räume selbst vollständig, und daraus wird sich ergeben, dass X ein vollständiger metrischer Raum ist. Der Banachsche Fixpunktsatz ist in dieser Situation also anwendbar.

Definieren wir nun $x^{(0)} = 1{,}5$ und $x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)})$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann erhalten wir die Werte

n	$x^{(n)}$
0	1,5
1	1,41666666666666667
2	1,41421568627450980
3	1,41421356237468991
4	1,41421356237309505

Die Abstand $|x^{(0)} - x^{(1)}|$ kann durch den Wert 0,084 nach oben abgeschätzt werden. Auf Grund der Fehlerabschätzung Proposition (1.23) gilt nach vier Schritten $|x^{(4)} - \sqrt{2}| < 0{,}105$, nach zwanzig Schritten $|x^{(20)} - \sqrt{2}| < 1{,}6 \cdot 10^{-7}$. Die Tabelle zeigt aber, dass die Approximation in der Praxis deutlich besser ist: Es gilt $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562373095048801$, also sind schon für das Folgenglied $x^{(4)}$ alle 17 angegebenen Nachkommastellen korrekt. Statt in der Größenordnung 0,1 beträgt der tatsächliche Fehler also höchstens $0{,}5 \cdot 10^{-17}$.

§ 2. Stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen

Inhaltsübersicht

In der Analysis einer Variablen haben wir die Stetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$ zunächst mit Hilfe von Folgen definiert: Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $\lim_n x_n = a$ muss auch $\lim_n f(x_n) = f(a)$ gelten. Genauso definieren wir auch die Stetigkeit einer Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) in einem Punkt $a \in X$. Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) beide $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik $d(a, b) = |b - a|$, dann stimmt die neue Definition der Stetigkeit mit der alten überein. Auch das bereits bekannte ε-δ-Kriterium lässt sich für metrische Räume formulieren.

Ein *Homömorphismus* ist eine stetige bijektive Abbildung zwischen metrischen Räumen, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist. Metrische Räume, zwischen denen eine solche Abbildung existiert, nennt man *homöomorph*. Diese Beziehung spielt eine wichtige Rolle, wenn man die Gesamtheit der stetigen Funktionen auf einem metrischen Raum studieren möchte, weil man dafür zu einem beliebigen, eventuell leichter handhabbaren Raum wechseln kann. Für Anwendungen in der Physik besonders nützliche Homömorphismen erhält man durch diverse Koordinatenabbildungen (Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten).

Am Ende des Kapitels befassen wir uns noch mit der Stetigkeit linearer Abbildungen. Lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräumen sind immer stetig. Bei Anwendungen in der Theorie der Differenzialgleichungen und in der Funktionalanalysis (und auch in der Physik) stößt man aber häufig auch auf unendlich-dimensionale Räume, bei denen die Stetigkeit einer linearen Abbildungen für viele Anwendungen relevant ist. Die in diesem Zusammenhang autretende *Operatornorm* wird häufig auch bei endlich-dimensionalen Problemen verwendet.

Wichtige Begriffe und Sätze

- stetige Abbildungen und Homöomorphismen zwischen metrischen Räumen
- Funktionsgrenzwert einer Abbildung in einem Berührpunkt des Definitionsbereichs
- Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten
- Operatornorm einer stetigen linearen Abbildung

(2.1) Definition Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ wird ***stetig*** in einem Punkt $a \in X$ bezüglich der Metriken d_X und d_Y genannt, wenn für jede Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ die Implikation

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a \quad \text{in} \quad (X, d_X) \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} f(x^{(n)}) = f(a) \quad \text{in} \quad (Y, d_Y) \qquad \text{gilt.}$$

Wir bezeichnen f insgesamt als stetig, wenn f in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ auf einem metrischen Raum (X, d_X) bezeichnen wir als *stetig*, wenn sie bezüglich d_X und der von der 1-Norm induzierten Metrik $d_1(a, b) = |a - b|$ auf $\mathbb{R}$ stetig ist. Ist auch X eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $d_X = d_1$, dann stimmt der Stetigkeitsbegriff mit dem Begriff aus der Analysis einer Variablen überein.

(2.2) Proposition Seien (X,d_X), (Y,d_Y) und (Z,d_Z) metrische Räume.

(i) Jede konstante Funktion auf X ist stetig.

(ii) Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen und $a \in X$ ein Punkt, so dass f in a und g in $f(a)$ stetig ist. Dann ist auch $g \circ f$ in a stetig.

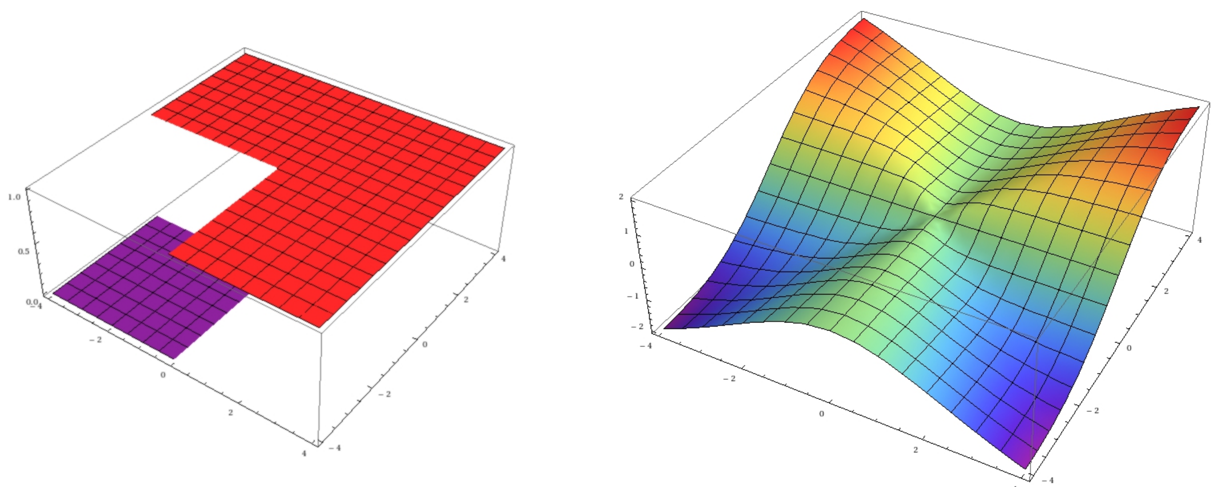
Beweis: zu (i) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = c$ für alle $x \in X$. Sei außerdem $a \in X$ ein beliebig gewählter Punkt und $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_n x^{(n)} = a$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x^{(n)}) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} c \quad = \quad c \quad = \quad f(a).$$

zu (ii) Sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $\lim_n x^{(n)} = a$. Weil f in a stetig ist, gilt $f(a) = \lim_n f(x^{(n)})$, und auf Grund der Stetigkeit von g im Punkt $f(a)$ erhalten wir

$$(g\circ f)(a) \quad = \quad g(f(a)) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} g(f(x^{(n)})) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} (g\circ f)(x^{(n)}).$$

Damit ist die Stetigkeit von $g \circ f$ in a bewiesen. □



Funktionsgraph einer unstetigen und eine stetigen Funktion auf dem $\mathbb{R}^2$.

Die unstetige Funktion besitzt unendlich viele Unstetigkeitsstellen, nämlich alle $(x,0)$ mit $x \le 0$ und alle $(0,y)$ mit $y \le 0$

Auch der Grenzwertbegriff für Funktionen lässt sich auf beliebige metrische Räume übertragen. Sei (X,d_X) ein metrischer Raum und $D \subseteq X$. Wir bezeichnen einen Punkt $a \in X$ als ***Berührpunkt*** von D, wenn $a \notin D$ gilt und eine Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim_n x^{(n)} = a$ existiert.

(2.3) Definition Seien (X,d_X) und (Y,d_Y) metrische Räume, $f : D \to Y$ eine Abbildung auf einer Teilmenge $D \subseteq X$ und a ein Berührpunkt von D. Wir bezeichnen $b \in Y$ als ***Grenzwert*** von f für $x \to a$, wenn für jede Folge $(x^{(n)})$ in D mit $\lim_n x^{(n)} = a$ jeweils

$$\lim_{n\to\infty} f(x^{(n)}) = b \qquad \text{in } (Y,d_Y) \text{ erfüllt ist.}$$

Sind X und Y Teilmengen von endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräumen, dann bezeichnen wir eine Funktion $f : X \to Y$ als *stetig* in einem Punkt $a \in X$, wenn sie bezüglich der induzierten Metriken von beliebig gewählten Normen auf X und Y stetig ist. Auf Grund der in Proposition (1.15) formulierten Unabhängigkeit der Konvergenz von der gewählten Norm hat die Wahl der Norm keinen Einfluss auf die Stetigkeitseigenschaft. Wichtig ist nur, dass die Metriken d_X und d_Y überhaupt von einer Norm induziert werden.

(2.4) Definition Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) wird ***Homöomorphismus*** genannt, wenn sie bijektiv, stetig und die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ ebenfalls stetig ist. Existiert ein solcher Homöomorphismus, dann bezeichnet man (Y, d_Y) als ***homöomorph*** zu (X, d_X).

Wie man anhand der Definition leicht überprüft, ist durch die Eigenschaft „homöomorph" eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der metrischen Räume definiert: Ist (Y, d_Y) homöomorph zu (X, d_X), dann ist auch (X, d_X) homöomorph zu (Y, d_Y). Ist (Z, d_Z) ein weiterer metrischer Raum, und ist (Y, d_Y) homöomorph zu (X, d_X), und (Z, d_Z) homöomorph zu (Y, d_Y), dann ist (Z, d_Z) homöomorph zu (X, d_X). Man muss hier von der „Klasse" der metrischen Räume sprechen, weil diese zu zahlreich sind, um eine Menge zu bilden. Dementsprechend ist die Eigenschaft „homöomorph" keine Relation auf einer Menge, sondern eine sogenannte Klassenrelation.

Die Eigenschaft „homömorph" spielt in der Analysis eine wichtige Rolle, weil zwischen den reellwertigen Funktionen zwischen homöomorphen metrischen Räumen eine natürliche 1-zu-1-Korrespondenz existiert: Ist $\phi : X \to Y$ ein Homöomorphismus zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) und $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann ist $f \circ \phi^{-1}$ eine stetige Funktion auf Y. Ist umgekehrt g eine stetige reellwertige Funktion auf Y, dann ist $g \circ \phi$ eine stetige reellwertige Funktion auf X. Wenn man allgemeine Aussagen über stetige reellwertige auf diesen Räumen untersuchen möchte, dann genügt es, sich auf einen der beiden Räume zu konzentrieren.

(2.5) Proposition Die Abbildung $\pi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $(x_1, ..., x_m) \mapsto x_i$ ist stetig, für $1 \le i \le m$.

Beweis: Sei $a \in \mathbb{R}^m$ und $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a$. Nach Satz (1.16) gilt dann insbesondere $\lim\limits_{n\to\infty} x_i^{(n)} = a_i$, also insgesamt $\lim_n \pi_i(x^{(n)}) = \lim_n x_i^{(n)} = a_i = \pi_i(a)$. □

(2.6) Satz *(ε-δ-Kriterium)*

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig im Punkt a bezüglich d_X und d_Y, wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass die Implikation

$$d_X(a, x) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in X \text{ erfüllt ist.}$$

Beweis: „⇐" Sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_n x^{(n)} = a$. Zu zeigen ist $\lim_n f(x^{(n)}) = f(a)$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben und $\delta \in \mathbb{R}^+$ so gewählt, dass die Implikation $d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon$ erfüllt ist. Auf Grund der Konvergenz von $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $d_X(a, x_n) < \delta$ für alle $n \ge N$ erfüllt ist. Es folgt dann $d_Y(f(a), f(x_n)) < \varepsilon$ für alle $n \ge N$.

„⇒“ Nehmen wir an, dass die Funktion f in a stetig, aber das ε-δ-Kriterium nicht erfüllt ist. Dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit der Eigenschaft, dass für jedes $\delta \in \mathbb{R}^+$ ein $x \in X$ mit $d_X(a,x) < \delta$ aber $d_Y(f(a), f(x)) \geq \varepsilon$ existiert. Insbesondere gibt es für $n \in \mathbb{N}$ ein $x^{(n)} \in X$ mit $d_X(a, x^{(n)}) < \frac{1}{n}$ und $d_Y(f(a), f(x^{(n)})) \geq \varepsilon$. Es ist dann $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_n x^{(n)} = a$, aber die Folge $(f(x^{(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen $f(a)$, im Widerspruch zur Stetigkeit. □

(2.7) Proposition Sei (X, d_X) ein metrischer Raum, $r \in \mathbb{N}$ und $f : X \to \mathbb{R}^d$ eine Funktion mit den Komponenten $f_1, ..., f_d : X \to \mathbb{R}$, so dass also $f(x) = (f_1(x), ..., f_d(x))$ für alle $x \in X$ gilt. Genau dann ist f in einem Punkt $a \in X$ stetig, wenn die Funktionen $f_1, ..., f_d$ alle in a stetig sind.

Beweis: „⇒“ Sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die in (X, d_X) gegen a konvergiert. Weil die Funktion f in a stetig ist, gilt $\lim_n f(x^{(n)}) = f(a)$. Nach Satz (1.16) folgt daraus $\lim_n f_k(x^{(n)}) = f_k(a)$ für $1 \leq k \leq d$. Dies wiederum bedeutet, dass die Funktionen $f_1, ..., f_d$ in a stetig sind. „⇐“ Sei wieder $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_n x^{(n)} = a$. Nach Voraussetzung sind die Funktionen $f_1, ..., f_d$ in a stetig, es gilt also $\lim_n f_k(x^{(n)}) = f_k(a)$ für $1 \leq k \leq n$. Nach Satz (1.16) folgt daraus $\lim_n f(x^{(n)}) = a$. Also ist f im Punkt a stetig. □

(2.8) Proposition Die folgenden Abbildungen $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$, $\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$ und $\delta : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{x}{y}$ sind stetig.

Beweis: Sei $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $((x^{(n)}, y^{(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty}(x^{(n)}, y^{(n)}) = (a, b)$. Nach Satz (1.16) gilt dann $\lim_n x^{(n)} = a$ und $\lim_n y^{(n)} = b$. Auf Grund der Grenzwertsätze aus der Analysis einer Variablen gilt

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(x^{(n)}, y^{(n)}) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} (x^{(n)} + y^{(n)}) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} x^{(n)} + \lim_{n\to\infty} y^{(n)} \quad = \quad a + b \quad = \quad \alpha(a, b)$$

und ebenso

$$\lim_{n\to\infty} \mu(x^{(n)}, y^{(n)}) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} x^{(n)} y^{(n)} \quad = \quad \left(\lim_{n\to\infty} x^{(n)}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} y^{(n)}\right) \quad = \quad ab \quad = \quad \mu(a, b)$$

Genauso leitet man die Stetigkeit von δ aus dem Grenzwertsatz für Quotientenfolgen ab. □

(2.9) Folgerung Sei (X, d_X) ein metrischer Raum, und seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann sind auch die Funktionen

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{und} \qquad (fg)(x) = f(x)g(x) \qquad \text{stetig.}$$

Gilt zusätzlich $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, dann ist auch $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ stetig.

Beweis: Nach Proposition (2.7) ist die Abbildung $(f, g) : X \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $(f, g)(x) = (f(x), g(x))$ stetig. Nach Definition gilt $f + g = \alpha \circ (f, g)$, $fg = \mu \circ (f, g)$ und $f/g = \delta \circ (f, g)$. Weil die Komposition stetiger Abbildungen nach (2.2) (ii) stetig ist, sind also $f + g$, fg und f/g stetige Funktionen. □

Als Anwendungsbeispiel zeigen wir

(2.10) Proposition Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \dfrac{x^3y + 5xy}{x^2 + y^4 + 1}$ ist stetig.

Beweis: Wie wir in (2.5) gezeigt haben, sind die Abbildungen $(x,y) \mapsto x$ und $(x,y) \mapsto y$ stetig. Ebenso ist nach Proposition (2.2) (i) die konstante Abbildung $(x,y) \mapsto 5$ eine stetige Funktion. Weil die Abbildung $(x,y) \mapsto x^2$ durch punktweise Multiplikation der Abbildung $(x,y) \mapsto x$ mit sich selbst zu Stande kommt, können wir Folgerung (2.9) anwenden und erhalten die Stetigkeit von $(x,y) \mapsto x^2$. Die Abbildung $(x,y) \mapsto x^3$ kommt durch punktweise Multiplikation von $(x,y) \mapsto x^2$ und $(x,y) \mapsto x$ zu Stande. Durch eine weitere Anwendung der Folgerung erhält man die Stetigkeit von $(x,y) \mapsto x^3$. Indem man weiter so vorgeht, beweist man nacheinander die Stetigkeit von $(x,y) \mapsto x^3y$, $(x,y) \mapsto 5x$, $(x,y) \mapsto 5xy$ und $(x,y) \mapsto x^3y+5xy$. Genauso beweist man die Stetigkeit der Funktion $(x,y) \mapsto x^2 + y^4 + 1$ im Nenner. Diese ist offenbar für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ungleich Null. Durch eine letzte Anwendung von Folgerung (2.9) erhält man schließlich die Stetigkeit von f. □

(2.11) Lemma Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann gilt

$$|\|v\| - \|w\|| \quad \le \quad \|v - w\| \qquad \text{für alle} \quad v, w \in V.$$

Beweis: Seien $v, w \in V$. Dann gilt auf Grund der Dreiecksungleichung einerseits $\|v\| = \|w+(v-w)\| \le \|w\|+\|v-w\|$, also $\|v\|-\|w\| \le \|v-w\|$. Andererseits gilt auch $\|w\| = \|(w-v)+v\| \le \|w-v\|+\|v\|$ und somit $\|w\|-\|v\| \le \|v-w\|$. Da der Betrag $|\|v\|-\|w\||$ immer mit $\|v\|-\|w\|$ oder $\|w\|-\|v\|$ übereinstimmt, erhalten wir insgesamt $|\|v\|-\|w\|| \le \|v-w\|$. □

(2.12) Folgerung Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann ist $V \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ eine stetige Funktion.

Beweis: Sei $v \in V$ und $(x^{(n)})$ eine Folge in V mit $\lim_n x^{(n)} = v$. Zu zeigen ist $\lim_n \|x^{(n)}\| = \|v\|$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Nach Definition gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|x^{(n)} - v\| < \varepsilon$ für alle $n \ge N$. Durch Lemma (2.11) folgt $|\|x^{(n)}\| - \|v\|| \le \|x^{(n)} - v\| < \varepsilon$ für alle $n \ge N$. □

Wir betrachten nun eine Reihe von Abbildungen, die besonders für physikalische und technische Anwendungen von Interesse sind. Im Folgenden bezeichnen wir eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ der Form $[a,b[$ oder $]a,b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ als *halboffenes Intervall* der Länge $b-a$. Zugleich ist $b-a$ auch die Länge des offenen Intervalls $]a,b[$ und des abgeschlossenen Intervalls $[a,b]$.

(2.13) Satz *(Definition der Polarkoordinaten)*

(i) Die Abbildung $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\varphi \mapsto (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ ist stetig, und für jedes halboffene Intervall I der Länge 2π ist die eingeschränkte Abbildung $\varphi|_I$ eine stetige Bijektion auf ihre Bildmenge.

(ii) Die Abbildung $\rho_{\text{pol}} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $(r, \varphi) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ wird ***Polarkoordinaten-Abbildung*** genannt. Für jedes Intervall I wie unter (i) ist auch $\rho_{\text{pol}}|_{\mathbb{R}^+ \times I}$ eine stetige Bijektion auf ihre Bildmenge.

Beweis: zu (i) Die Abbildung ϕ ist nach Proposition (2.7) stetig, weil die Komponentenfunktionen $\varphi \mapsto \cos(\varphi)$ und $\varphi \mapsto \sin(\varphi)$ stetig sind. Zu zeigen ist nun nur noch die Injektivität von $\varphi|_I$ für ein Intervall der Form $I = [\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi[$ oder $I =]\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi]$, für ein beliebiges $\varphi_0 \in \mathbb{R}$. Wir beschränken uns auf den ersten Fall, da der andere vollkommen analog behandelt wird. Seien also $\varphi_1, \varphi_2 \in I$ mit $\phi(\varphi_1) = \phi(\varphi_2)$; zu zeigen ist $\varphi_1 = \varphi_2$. Aus der Voraussetzung folgt $\cos(\varphi_1) = \cos(\varphi_2)$ und $\sin(\varphi_1) = \sin(\varphi_2)$.

Nun wählen wir $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ so, dass $\varphi_1' = \varphi_1 - 2n_1\pi$ und $\varphi_2' = \varphi_2 - 2n_2\pi$ beide im Intervall $[-\pi, \pi[$ liegen. Es gilt dann auch $\cos(\varphi_1') = \cos(\varphi_2')$ und $\sin(\varphi_1') = \sin(\varphi_2')$. Weil die Kosinusfunktion auf $[0, \pi]$ injektiv ist und außerdem $\cos(x) = \cos(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, folgt aus der ersten Gleichung $\varphi_2' \in \{\pm\varphi_1'\}$. Weil aber $\sin(x) > 0$ für alle $x \in]0, \pi[$ und $\sin(x) < 0$ für alle $x \in]-\pi, 0[$ gilt, ist auf Grund der zweiten Gleichung nur $\varphi_2' = \varphi_1'$ möglich. Es folgt $\varphi_2 = \varphi_2' + 2n_2\pi = \varphi_1' + 2n_2\pi = \varphi_1 + 2(n_2 - n_1)\pi$. Weil aber $\varphi_1 + 2m\pi$ im Fall $m \neq 0$ außerhalb des Intervalls I liegen müsste, im Widerspruch zu $\varphi_2 \in I$, erhalten wir $n_1 = n_2$ und insgesamt $\varphi_1 = \varphi_2$.

zu (ii) Weil die Abbildungen $(r, \varphi) \mapsto r$ und $(r, \varphi) \mapsto \varphi$ nach Proposition (2.5) stetig sind, gilt dasselbe nach Folgerung (2.9) auch für $(r, \varphi) \mapsto r\cos(\varphi)$ und $(r, \varphi) \mapsto r\sin(\varphi)$. Eine erneute Anwendung von Proposition (2.7) liefert dann die Stetigkeit der Abbildung ρ_{pol}. Zum Nachweis der Injektivitätsaussage sei I wieder ein Intervall der angegebenen Form, und seien (r, φ) und (r', φ') in $\mathbb{R}^+ \times I$ mit $\rho_{\text{pol}}(r, \varphi) = \rho_{\text{pol}}(r', \varphi')$ vorgegeben. Dann gilt $r\cos(\varphi) = r'\cos(\varphi')$ und $r\sin(\varphi) = r'\sin(\varphi')$. Zunächst erhalten wir

$$r^2 \quad = \quad (r\cos(\varphi))^2 + (r\sin(\varphi)^2)^2 \quad = \quad (r'\cos(\varphi'))^2 + (r'\sin(\varphi')^2)^2 \quad = \quad (r')^2$$

und somit $r = r'$. Daraus folgt $\cos(\varphi) = \cos(\varphi')$ und $\sin(\varphi) = \sin(\varphi')$, also $\phi(\varphi) = \phi(\varphi')$ für die Abbildung ϕ aus Teil (i). Auf Grund der dort bewiesenen Injektivität folgt $\varphi = \varphi'$, insgesamt also $(r, \varphi) = (r', \varphi')$ wie gewünscht. □

Es ist nicht schwer zu sehen, dass die Bildmenge von $\phi|_I$ jeweils der Einheitskreis ist, und dass die Bildmenge von $\rho_{\text{pol}}|_{\mathbb{R}^+ \times I}$ durch $\mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ gegeben ist. Wir verzichten an dieser Stelle aber auf einen Beweis.

Häufig bezeichnet man in der Physik eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ als Funktion in ***kartesischen Koordinaten***, während die Funktion f_{pol} auf $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ gegeben durch $f_{\text{pol}} = f \circ \rho_{\text{pol}}$ die entsprechende Funktion „in Polarkoordinaten" genannt wird. Der Übergang zu Polarkoordinaten ermöglicht besonders in Situationen eine Vereinfachung von Berechnungen, in denen die Funktion symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs $(0, 0)$ ist, der Funktionswert $f(x, y)$ also nur vom Abstand $r = \|(x, y)\|_2$ des Punktes (x, y) vom Ursprung abhängt.

Beispielsweise hat die Funktion $f(x,y) = (x^2+y^2)^2$ in Polarkoordinaten die einfache Form

$$f_{\text{pol}}(r,\varphi) \quad = \quad (f \circ \rho_{\text{pol}})(r,\varphi) \quad = \quad f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \quad = \quad ((r\cos(\varphi))^2 + (r\sin(\varphi))^2)^2$$
$$= \quad (r^2(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2))^2 \quad = \quad (r^2)^2 \quad = \quad r^4.$$

In diesem Zusammenhang ist es wichtig, auch partielle Ableitungen und diverse Differenzialoperatoren, die wir später einführen werden (Gradient, Divergenz, Rotation), in Polarkoordinaten ausdrücken zu können. Wir kommen zu einem geeigneten Zeitpunkt auf dieses Thema zurück.

Wir werden später auch zeigen: Ist I ein *offenes* Intervall mit Länge $\le 2\pi$, dann sind $\phi|_I$ und $\rho_{\text{pol}}|_{\mathbb{R}^+ \times I}$ sogar Homömorphismen auf ihre Bildmenge. Im Kapitel über die implizite Funktionen und lokale Umkehrbarkeit werden wir sehen, dass man dies nachweisen kann, ohne die Umkehrabbildung vorher explizit auszurechnen.

Ist I jedoch halboffen mit Länge 2π, zum Beispiel $I = [0, 2\pi[$, dann ist $\phi|_I$ *kein* Homöomorphismus, denn die Umkehrabbildung $(\phi|_I)^{-1}$ ist im Punkt $(1,0)$ unstetig. Eine bijektive stetige Abbildung ist also im Allgemeinen kein Homömorphismus! Um das in dieser konkreten Situation zu sehen, betrachten wir die Folge $(\varphi^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in I gegeben durch $\varphi^{(n)} = 2\pi - \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und definieren $(x^{(n)}, y^{(n)}) = \phi(\varphi^{(n)})$ für $n \in \mathbb{N}$. Auf Grund der Stetigkeit von ϕ gilt $\lim_n (x^{(n)}, y^{(n)}) = \phi(2\pi) = (\cos(2\pi), \sin(2\pi)) = (1,0)$. Nun ist $(\phi|_I)^{-1}(1,0) = 0$, denn 0 ist der eindeutig bestimmte Punkt in I mit $(\phi|_I)(0) = (\cos(0), \sin(0)) = (1,0)$. Wäre auch $(\phi|_I)^{-1}$ stetig, dann müsste also $\lim_n \phi^{-1}(x^{(n)}, y^{(n)}) = (\phi|_I)^{-1}(1,0) = 0$ gelten. Tatsächlich gilt wegen $\varphi^{(n)} \in I$ und $\phi(\varphi^{(n)}) = (x^{(n)}, y^{(n)})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ aber

$$\lim_{n\to\infty} \phi^{-1}(x^{(n)}, y^{(n)}) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \varphi^{(n)} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} (2\pi - \tfrac{1}{n}) \quad = \quad 2\pi \quad \neq \quad 0.$$

Im $\mathbb{R}^3$ ist vor allem die Verwendung der folgenden Koordinatenabbildungen üblich.

(2.14) Satz *(Definition der Zylinder- und Kugelkoordinaten)*
Sei I ein halboffenes Intervall der Länge 2π.

(i) Die Abbildung $\rho_{\text{zyl}} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $(r, \varphi, h) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), h)$ ist stetig, und die Einschränkung $\rho_{\text{zyl}}|_{M_I}$ auf $M_I = \mathbb{R}^+ \times I \times \mathbb{R}$ ist eine stetige Bijektion auf ihre Bildmenge.

(ii) Die Abbildung $\rho_{\text{kug}} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$(r, \vartheta, \varphi) \quad \mapsto \quad (r\sin(\vartheta)\cos(\varphi), r\sin(\vartheta)\sin(\varphi), r\cos(\vartheta))$$

ist ebenfalls stetig, und die Einschränkung $\rho_{\text{kug}}|_{N_I}$ auf $N_I = \mathbb{R}^+ \times]0, \pi[\times I$ ist eine stetige Bijektion auf ihre Bildmenge.

Die Abbildung ρ_{zyl} wird ***Zylinderkoordinaten-Abbildung***, die Abbildung ρ_{kug} ***Kugelkoordinaten-Abbildung*** genannt.

Betrachtet man für ein festes $r \in \mathbb{R}^+$ die Sphäre vom Radius r als Globus, dann lässt sich der Winkel φ, der auch ***Azimutwinkel*** genannt wird, als Längengrad interpretieren, sofern er im Bereich $[-\pi, \pi]$ gewählt wird. Es enspricht dann $\varphi = 0 = 0°$ dem Meridian, während der 180-te Grad „westlicher Länge“ ($\varphi = -\pi$) mit dem 180-ten Grad „östlicher Länge“ ($\varphi = \pi$) in der Nähe der Datumsgrenze zusammenfällt. Für den sog. ***Polarwinkel*** ϑ kann entsprechend $\vartheta + \frac{1}{2}\pi$ als „Breitengrad“ angesehen werden, sofern ϑ im Intervall $[-\pi, 0]$ und $\vartheta + \frac{1}{2}\pi$ somit im Intervall $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ liegt. Für $\vartheta = 0 \Leftrightarrow \vartheta + \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi = 90°$ „nördlicher Breite“ erhält man wegen $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$ den Nordpol $(0, 0, r)$, für $\vartheta = -\pi \Leftrightarrow \vartheta + \frac{1}{2}\pi = -\frac{1}{2}\pi = -90°$, also 90° „südlicher Breite“ wegen $\sin(-\pi) = 0$ und $\cos(-\pi) = -1$ den Südpol $(0, 0, -r)$ der Erdkugel. Der Wert $\vartheta = -\frac{1}{2}\pi \Leftrightarrow \vartheta + \frac{1}{2}\pi = 0$ entspricht natürlich dem Äquator.

Beweis von Satz (2.14):

Der Beweis der Stetigkeit kann genau wie in Satz (2.13) geführt werden. Wir können uns also ganz auf den Nachweis der Injektivität konzentrieren.

zu (i) Seien $(r, \varphi, h), (r', \varphi', h')$ in $\mathbb{R}^+ \times I \times \mathbb{R}$ mit $\rho_{\text{zyl}}(r, \varphi, h) = \rho_{\text{zyl}}(r', \varphi', h')$ vorgegeben. Dann gilt $r\cos(\varphi) = x = r'\cos(\varphi')$, $r\sin(\varphi) = y = r'\sin(\varphi')$ und $h = h'$. Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $\rho_{\text{pol}}(r, \varphi) = \rho_{\text{pol}}(r', \varphi')$ mit der Polarkoordinaten-Abbildung. Weil die Einschränkung dieser Abbildung auf $\mathbb{R}^+ \times I$ nach Satz (2.13) injektiv ist, folgt $(r, \varphi) = (r', \varphi')$. Insgesamt ist damit $(r, \varphi, h) = (r', \varphi', h')$ nachgewiesen.

zu (ii) Seien $(r, \vartheta, \varphi), (r', \vartheta', \varphi') \in \mathbb{R}^+ \times]0, \pi[\times I$ mit $\rho_{\text{kug}}(r, \vartheta, \varphi) = (x, y, z) = \rho_{\text{kug}}(r', \vartheta', \varphi')$ vorgegeben. Dann gilt

$$x = r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) = r'\sin(\vartheta')\cos(\varphi') \quad , \quad y = r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) = r'\sin(\vartheta')\sin(\varphi')$$
$$\text{und} \quad z = r\cos(\vartheta) = r'\cos(\vartheta').$$

Zunächst erhalten wir die Gleichung $r = r'$, weil

$$x^2 + y^2 + z^2 \quad = \quad r^2\sin(\vartheta)^2(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2) + r^2\cos(\vartheta)^2 \quad = \quad r^2\sin(\vartheta)^2 \cdot 1 + r^2\cos(\vartheta)^2 \quad = \quad r^2$$

gilt und man durch eine ebensolche Rechnung auch $x^2 + y^2 + z^2 = (r')^2$ erhält. Mit Hilfe der Gleichung für die z-Koordinate folgt $\cos(\vartheta) = \cos(\vartheta')$. Weil die Kosinusfunktion auf dem Intervall $]0, \pi[$ streng monoton fallend, also insbesondere injektiv ist, folgt $\vartheta = \vartheta'$. Weil die Sinusfunktion auf dem Intervall $]0, \pi[$ nicht Null wird, dürfen wir die Gleichung für die x-Koordinate durch $r\sin(\vartheta) = r'\sin(\vartheta')$ dividieren und erhalten $\cos(\varphi) = \cos(\varphi')$. Die Gleichung für die y-Koordinate liefert ebenso $\sin(\varphi) = \sin(\varphi')$. Somit gilt $\phi(\varphi) = \phi(\varphi')$, wobei ϕ die Abbildung aus Satz (2.13) bezeichnet. Weil $\phi|_I$ laut diesem Satz injektiv ist, erhalten wir $\varphi = \varphi'$. Insgesamt ist damit $(r, \vartheta, \varphi) = (r', \vartheta', \varphi')$ nachgewiesen.

Im letzten Teil dieses Kapitels untersuchen wir die Stetigkeit von linearen Abbildungen.

(2.15) Satz Eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ zwischen normierten $\mathbb{R}$-Vektorräumen ist genau dann stetig, wenn eine Konstante $\gamma \in \mathbb{R}^+$ mit $\|\phi(v)\| \le \gamma\|v\|$ für alle $v \in V$ existiert.

Beweis: „$\Rightarrow$“ Auf Grund der Stetigkeit von ϕ im Punkt 0_V und auf Grund des ε-δ-Kriteriums gibt es für $\varepsilon = 1$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit $\|v\| < \delta \Rightarrow \|\phi(v)\| < 1$ für alle $v \in V$. Sei nun $\gamma = 2\delta^{-1}$ und $v \in V$ mit $v \neq 0_V$ vorgegeben. Dann ist $v' = \frac{1}{\gamma\|v\|}v$ ein Vektor mit $\|v'\| = \frac{1}{2}\delta < \delta$. Es folgt $\|\phi(v')\| < 1$, und wegen $v = \gamma\|v\|v'$ und der Linearität von ϕ erhalten wir die Ungleichung $\|\phi(v)\| = \|\phi(\gamma\|v\|v')\| = \gamma\|v\|\|\phi(v')\| < \gamma\|v\|$.

„$\Leftarrow$“ Sei $\gamma \in \mathbb{R}^+$ eine Konstante wie angegeben und $a \in V$ beliebig. Für alle $v \in V$ mit dann

$$\|\phi(v) - \phi(a)\| \quad \le \quad \|\phi(v-a)\| \quad \le \quad \gamma\|v-a\|.$$

Ist nun $(v^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_n v^{(n)} = a$, dann gilt $\lim_n \|v^{(n)} - a\| = 0$. Aus den Ungleichungen $0 \le \|\phi(v^{(n)}) - \phi(a)\| \le \gamma\|v^{(n)} - a\|$ für $n \in \mathbb{N}$ folgt $\lim_n \|\phi(v^{(n)}) - \phi(a)\| = 0$ und somit $\lim_n \phi(v^{(n)}) = \phi(a)$. □

Das folgende Beispiel zeigt, dass nicht jede lineare Abbildung stetig ist.

(2.16) Proposition Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynomfunktionen auf dem Intervall $[0,1]$, ausgestattet mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup\{\, |f(x)| \mid x \in [0,1]\}$. Dann ist die Ableitungsabbildung $\phi_1 : V \to V$, $f \mapsto f'$ unstetig.

Beweis: Angenommen, es ist $\gamma \in \mathbb{R}^+$ eine Konstante mit der Eigenschaft $\|\phi_1(f)\|_\infty \le \gamma\|f\|_\infty$ für alle $f \in V$. Dann betrachten wir die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $f_n(x) = x^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der betragsmäßig größte Funktionswert, der von f_n im Intervall $[0,1]$ angenommen wird, ist $|f_n(1)| = 1$, also gilt $\|f_n\|_\infty = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Bilder der Folgenglieder sind gegeben durch $\phi_1(f_n) = f_n'$ mit $f_n'(x) = nx^{n-1}$. Es gilt $\|\phi_1(f_n)\|_\infty = \|f_n'\|_\infty = |f_n'(1)| = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setzen wir nun die Funktionen f_n in die Abschätzung von oben ein, dann erhalten wir $\|\phi_1(f_n)\|_\infty \le \gamma\|f_n\|_\infty$, also $n \le \gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies aber widerspricht der Unbeschränktheit der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen. Also existiert keine Konstante γ mit der angegebenen Eigenschaft. □

Seien V, W zwei normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume. Dann bezeichnen wir mit $\mathscr{L}(V,W)$ den Untervektorraum vom $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W)$ bestehend aus den *stetigen* linearen Abbildungen $V \to W$.

(2.17) Satz Für jedes $\phi \in \mathscr{L}(V,W)$ existiert das Supremum

$$\|\phi\| \quad = \quad \sup\{\, \|\phi(v)\| \mid v \in V \;,\; \|v\| \le 1\}.$$

Durch die Zuordnung $\mathscr{L}(V,W) \to \mathbb{R}_+$, $\phi \mapsto \|\phi\|$ ist auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathscr{L}(V,W)$ eine Norm definiert, die sogenannte ***Operatornorm***.

Beweis: Das Supremum existiert, weil die angegebene Menge nichtleer und auf Grund des vorherigen Satzes nach oben beschränkt ist. Für die Nullabbildung gilt offenbar $\|0_{L(V,W)}\| = 0$. Sei umgekehrt $\phi \in \mathscr{L}(V,W)$ mit $\|\phi\| = 0$. Für jeden Vektor $0_V \neq v \in V$ gilt dann

$$\|\phi(v)\| \quad = \quad \|v\| \left\| \phi\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \right\| \quad \leq \quad \|v\| \cdot 0 \quad = \quad 0$$

und somit $\phi(v) = 0$, d.h. ϕ ist die Nullabbildung. Die Gleichung $\|\lambda\phi\| = |\lambda|\|\phi\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\phi \in \mathscr{L}(V,W)$ ist offensichtlich, denn der Übergang von ϕ zu $\lambda\phi$ bewirkt, dass die Zahlen in der Menge $\{\|\phi(v)\| \mid v \in V \mid \|v\| \leq 1\}$ mit dem Wert $|\lambda|$ multipliziert werden. Seien nun $\phi, \psi \in \mathscr{L}(V,W)$ vorgegeben und $v \in V$ mit $\|v\| \leq 1$. Dann gilt

$$\|\phi(v) + \psi(v)\| \quad \leq \quad \|\phi(v)\| + \|\psi(v)\| \quad \leq \quad \|\phi\| + \|\psi\| \quad ,$$

also $\|\phi + \psi\| \leq \|\phi\| + \|\psi\|$ nach Definition der Operatornorm. □

Aus der Definition der Operatornorm folgt unmittelbar $\|\phi(v)\| \leq \|\phi\|\|v\|$ für alle $\phi \in \mathscr{L}(V,W)$ und $v \in V$.

(2.18) Proposition Seien $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ jeweils mit der Supremums-Norm $\|\cdot\|_\infty$ ausgestattet und $A \in \mathscr{M}_{m\times n,\mathbb{R}}$ eine Matrix. Dann ist die Operatornorm von $\phi_A : V \to W$, $v \mapsto Av$ gegeben durch

$$\|\phi_A\| \quad = \quad \max\left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \;\middle|\; 1 \leq i \leq m \right\} \tag{2.19}$$

Man bezeichnet diese Norm auch als ***Zeilensummennorm***.

Beweis: Wir zeigen, dass der Wert $\|\phi_A(v)\|$ für alle $v \in V$ mit $\|v\|_\infty \leq 1$ durch die Zahl γ_A auf der rechten Seite von (2.19) beschränkt ist, und dass es Vektoren $v \in V$ mit $\|v\|_\infty = 1$ gibt, für die $\|\phi_A(v)\|_\infty = \gamma_A$ erfüllt ist. Beide Aussagen zusammen beweisen die Gleichung $\|\phi_A\| = \gamma_A$.

Sei also $v \in V$ mit $\|v\|_\infty \leq 1$ vorgegeben. Dann sind die Komponenten von $w = \phi_A(v)$ durch $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$ gegeben und können durch

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \right| \quad \leq \quad \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||v_j| \quad \leq \quad \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad ,$$

also insbesondere durch das Maximum dieser Zahlen abgeschätzt werden. Andererseits wird das Maximum auch durch Vektoren $v \in V$ mit $\|v\|_\infty = 1$ angenommen: Ist i_0 der Index der Zeile mit der maximalen Betragssumme, also

$$\max\left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \;\middle|\; 1 \leq i \leq m \right\} \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}| \quad ,$$

dann definieren wir $v = (v_1, ..., v_n)$ durch $v_j = |a_{i_0 j}|/a_{i_0 j}$ falls $a_{i_0 j} \neq 0$ und $v_j = 1$ sonst, für $1 \leq j \leq n$. Die Gleichung $\|v\|_\infty = 1$ ist dann offensichtlich, denn die Einträge des Vektors sind alle gleich 1 oder -1. In der Summe $\sum_{j=1}^n a_{i_0 j} v_j$ sind alle Summanden nicht-negativ, und es gilt $\sum_{j=1}^n a_{i_0 j} v_j = \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}| = \|\phi_A\|$. □

(2.20) Folgerung Jede lineare Abbildung von einem endlich-dimensionalen in einen normierten $\mathbb{R}$-Vektorraum beliebiger Dimension ist stetig. Jeder Isomorphismus zwischen $\mathbb{R}$-Vektorräumen derselben endlichen Dimension ist ein Homöomorphismus.

Beweis: Sei V endlich-dimensional, W beliebig und $(v_1,...,v_n)$ eine Basis von V. Da sich an der Stetigkeit einer Abbildung bei Übergang zu einer äquivalenten Norm nichts ändert, können wir annehmen, dass die Norm auf V durch

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i\right\| \quad = \quad \max\{|\lambda_1|,...,|\lambda_n|\}$$

gegeben ist. Sei nun $v \in V$ beliebig, $v = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i$. Setzen wir $\gamma = \max\{\|\phi(v_1)\|,...,\|\phi(v_n)\|\}$, dann gilt

$$\|\phi(v)\| \quad = \quad \left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\phi(v_i)\right\| \quad \le \quad \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\|\phi(v_i)\| \quad \le \quad n\gamma\|v\|.$$

Die zweite Aussage folgt unmittelbar aus der ersten. □

Das folgende Resultat werden wir benötigen, um später die Stetigkeit von Ableitungsfunktionen zu untersuchen. Denn wie wir im Kapitel über totale Differenzierbarkeit sehen werden, nimmt die (totale) Ableitung der Funktion im Mehrdimensionalen ihre Werte nicht in $\mathbb{R}$, sondern in einem Vektorraum an, der seinerseits aus linearen Abbildungen besteht.

(2.21) Satz Sei X ein metrischer Raum, und seien V,W zwei endlich-dimensionale, normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume. Eine Abbildung $\varphi : X \to \mathscr{L}(V,W)$ ist genau dann stetig, wenn die Zuordnung $\varphi_v : X \to W$, $x \mapsto \varphi(x)(v)$ für jeden Vektor $v \in V$ stetig ist.

Beweis: „⇒“ Sei $x \in X$ und $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $\lim_n x^{(n)} = x$. Für jeden Vektor $v \in V$ ist $\lim_n \varphi(x^{(n)})(v) = \varphi(x)(v)$ nachzuweisen. Für $v = 0_V$ ist dies offensichtlich, weil dann $\varphi(x)(v) = 0_W$ und $\varphi(x^{(n)})(v) = 0_W$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Also können wir von nun an $v \neq 0_V$ voraussetzen. Auf Grund der Stetigkeit von φ finden wir für jedes ε ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|\varphi(x^{(n)}) - \varphi(x)\| < \varepsilon/\|v\|$ für alle $n \ge N$. Nach Definition der Operatornorm folgt daraus

$$\|\varphi(x^{(n)})(v) - \varphi(x)(v)\| \quad = \quad \|(\varphi(x^{(n)}) - \varphi(x))(v)\| \quad \le \quad \|\varphi(x_n) - \varphi(x)\|\|v\| \quad < \quad \frac{\varepsilon}{\|v\|}\|v\| \quad = \quad \varepsilon$$

für alle $n \ge N$. Also ist die Gleichung $\lim_n \varphi(x^{(n)})(v) = \varphi(x)(v)$ erfüllt.

„⇐“ Sei $\mathscr{B} = (v_1,...,v_d)$ eine Basis von V. Der Raum $\mathscr{L}(V,W)$ ist endlich-dimensional, deshalb sind je zwei Normen darauf äquivalent. Wir können also die Norm auf V und damit auch die Operatornorm auf $\mathscr{L}(V,W)$ abändern, ohne dass sich dadurch an der Stetigkeit von φ etwas ändert. Deshalb können wir davon ausgehen, dass die Norm auf V durch

$$\left\|\sum_{i=1}^{d}\lambda_i v_i\right\| \quad = \quad \max\{|\lambda_1|,...,|\lambda_d|\}$$

definiert ist. Sei nun $x \in X$ und $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $\lim_n x^{(n)} = x$. Zu zeigen ist, dass die Folge $\psi_n = \varphi(x^{(n)})$ bezüglich der Operatornorm gegen das Element $\psi = \varphi(x) \in \mathscr{L}(V,W)$ konvergiert. Weil nach Voraussetzung die Zuordnungen $x \mapsto \varphi(x)(v_i)$ für $1 \le i \le d$ stetig sind, existiert für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $\|\psi_n(v_i) - \psi(v_i)\| \le \frac{\varepsilon}{d}$ für alle $n \ge N$ und $1 \le i \le d$ erfüllt ist.

Sei nun $v \in V$ beliebig vorgegeben, $v = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i v_i$. Dann gilt

$$\|\psi_n(v) - \psi(v)\| \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{d} |\lambda_i| \|\psi_n(v_i) - \psi(v_i)\| \quad < \quad \sum_{i=1}^{d} |\lambda_i| \frac{\varepsilon}{d} \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{d} \|v\| \frac{\varepsilon}{d} \quad = \quad \varepsilon \|v\|.$$

Insbesondere gilt $\|(\psi_n - \psi)(v)\| \leq \varepsilon$ für alle $v \in V$ mit $\|v\| \leq 1$ und alle $n \geq N$. Nach Definition der Operatornorm gilt also $\|\psi_n - \psi\| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$. $\square$

§ 3. *Topologische Räume*

Inhaltsübersicht

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ eines metrischen Raums (X, d_X) wird *offen* genannt, wenn um jeden Punkt von U ein (eventuell sehr kleiner) ε-Ball gelegt werden kann, der immer noch vollständig vollständig in U liegt. Komplemente offener Teilmengen werden als *abgeschlossen* bezeichnet. Die offenen Teilmengen eines metrischen Raums bilden ein Mengensystem, das bestimmten Gesetzmäßigkeiten unterliegt. Dies führt uns zum Begriff des *topologischen Raums*, einer Verallgemeinerung der metrischen Räume.

Die Konvergenz von Folgen und die Stetigkeit von Abbildungen lassen sich im allgemeinen Kontext topologischer Räume formulieren, und zumindest in metrischen Räumen lässt sich die Abgeschlossenheit einer Teilmenge anhand eines Folgenkriteriums überprüfen. Im Allgemeinen ist es möglich, dass eine Folge in einem topologischen Raum mehrere Grenzwerte besitzt; in den *hausdorffschen* topologischen Räumen ist der Grenzwert allerdings (im Falle der Existenz) weiterhin eindeutig.

Jeder Teilmenge A eines topologischen Rings lässt sich eine offene Menge A° und eine abgeschlossene Menge $\bar{A}$ mit $A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A}$ zuordnen, genannt das *Innere* und der *Abschluss* von A. Die Menge $\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$ wird der *Rand* von A genannt. Der Menge A kann selbst auf natürliche Weise die Struktur eines topologischen Raums gegeben werden; man bezeichnet diese als *induzierte Topologie*.

Wichtige Begriffe und Sätze

- (hausdorffscher) topologischer Raum
- offene und abgeschlossene Teilmengen in metrischen und topologischen Räumen
- Umgebung eines Punktes
- Konvergenz von Folgen in topologischen Räumen
- Stetigkeit einer Abbildung zwischen topologischen Räumen
- Inneres A° und Abschluss $\bar{A}$ einer Teilmenge A eines topologischen Raums, Rand von A
- induzierte Topologie auf einer Teilmenge eines topologischen Raums

(3.1) Definition Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(i) Eine Teilmenge $U \subseteq X$ wird ***offen*** genannt, wenn für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ gilt.

(ii) Man bezeichnet eine Teilmenge $A \subseteq X$ als ***abgeschlossen***, wenn das Komplement $X \setminus A$ von A in X offen ist.

Wir betrachten eine Reihe von Beispielen. Dabei legen wir auf der Menge $\mathbb{R}$ stets die Standardmetrik d_1 gegeben durch $d_1(x,y) = |x-y|$ zu Grunde.

(i) Offene Intervalle der Form $]a,b[$ mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ sind offene Teilmengen im metrischen Raums $(\mathbb{R},d_1)$. Sei nämlich $x \in]a,b[$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ so gewählt, dass im Fall $a \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $\varepsilon \leq x-a$ und im Fall $b \in \mathbb{R}$ auch die Ungleichung $\varepsilon \leq b-x$ erfüllt ist. Wir überprüfen, dass $B_\varepsilon(x) \subseteq]a,b[$ gilt. Sei dazu $y \in B_\varepsilon(x)$ vorgegeben; dann gilt $|y-x| < \varepsilon$, also $x-\varepsilon < y < x+\varepsilon$. Ist $a \in \mathbb{R}$, dann gilt $y > x-\varepsilon \geq x-(x-a) = a$. Ist $b \in \mathbb{R}$, dann gilt $y < x+\varepsilon \leq x+(b-x) = b$. Insgesamt ist damit $y \in]a,b[$ nachgewiesen. (Man beachte, dass im Fall $a = -\infty$ keine untere und im Fall $b = +\infty$ keine obere Abschätzung für y nachgewiesen werden muss.)

(ii) Abgeschlossene Intervalle der Form $[a,b]$ mit $-\infty < a < b < +\infty$ sind abgeschlossene Teilmengen in $(\mathbb{R},d_1)$. Dazu müssen wir zeigen, dass $U = X \setminus [a,b]$ in $(\mathbb{R},d_1)$ offen ist. Sei $x \in U$ vorgegeben; wir überprüfen, dass ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ existiert. Wegen $x \in U$ gilt $x < a$ oder $x > b$. Ist $x < a$, dann setzen wir $\varepsilon = a-x$. Es gilt dann $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Ist nämlich $y \in B_\varepsilon(x)$, dann gilt $|y-x| < \varepsilon$ und insbesondere $y < x+\varepsilon = x+(a-x) = a$. Es folgt $y \notin [a,b]$, also $y \in U$. Betrachten wir nun den Fall $x > b$. Dann ist $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ für $\varepsilon = x-b$ erfüllt. Denn ist $y \in B_\varepsilon(x)$, dann folgt aus $|y-x| < \varepsilon$ insbesondere $y > x-\varepsilon = x-(x-b) = b$, also $y \notin [a,b]$ und damit $y \in U$.

(iii) Halboffene Intervalle der Form $[a,b[$ mit $-\infty < a < b < +\infty$ sind weder offen noch abgeschlossen in $(\mathbb{R},d_1)$. Wäre die Menge offen, dann müsste es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(a) \subseteq [a,b[$ geben. Ist aber y ein beliebiger Punkt in $]a-\varepsilon,a[$, ist dieser wegen $|y-a| < \varepsilon$ zwar in $B_\varepsilon(a)$ enthalten, wegen $y < a$ aber nicht in $[a,b[$. Nehmen wir nun an, die Menge wäre abgeschlossen in $(\mathbb{R},d_1)$. Dann wäre $V = \mathbb{R} \setminus [a,b[$ in $(\mathbb{R},d_1)$ offen. Insbesondere gäbe es dann wegen $b \in V$ ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(b) \subseteq V$. Ist aber $y \in \mathbb{R}$ mit $\max\{a,b-\varepsilon\} < y < b$, dann gilt zwar $y \in B_\varepsilon(b)$, aber wegen $y \in [a,b[$ andererseits $y \notin V$. Ebenso ist jedes halboffene Intervall der Form $]a,b]$ mit $-\infty < a < b < +\infty$ weder offen noch abgeschlossen.

(iv) Sei (X,d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $r \in \mathbb{R}^+$. Dann ist der offene Ball $B_r(x)$ eine offene und der abgeschlossene Ball $\bar{B}_r(x)$ eine abgeschlossenen Teilmenge in (X,d). Zum Nachweis der Offenheit von $B_r(x)$ sei $y \in B_r(x)$ und $\varepsilon = r - d(x,y)$. Wegen $d(x,y) < r$ ist ε eine positive Zahl. Es gilt dann $B_\varepsilon(y) \subseteq B_r(x)$. Denn für jedes $z \in B_\varepsilon(y)$ gilt $d(y,z) < \varepsilon$ und damit $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + r - d(x,y) = r$, also $z \in B_r(x)$.

Um zu zeigen, dass $\bar{B}_r(x)$ abgeschlossen ist, müssen wir zeigen, dass es sich bei $U = X \setminus \bar{B}_r(x)$ um eine offene Teilmenge in (X,d) handelt. Ist $y \in U$ vorgegeben, dann gilt $d(x,y) > r$, und somit ist $\varepsilon = d(x,y) - r \in \mathbb{R}^+$. Wir zeigen, dass $B_\varepsilon(y) \subseteq U$ gilt. Nehmen wir an, dass dies nicht der Fall ist, und somit ein Punkt $z \in B_\varepsilon(y)$ mit $z \notin U$ existiert. Dann folgt $z \in \bar{B}_r(x)$. Es gilt dann sowohl $d(y,z) < \varepsilon$ als auch $d(x,z) \leq r$. Es folgt dann $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = d(x,z) + d(y,z) < r + \varepsilon = r + (d(x,y) - r) = d(x,y)$. Der Widerspruch $d(x,y) < d(x,y)$ zeigt, dass $B_\varepsilon(y) \subseteq U$ gelten muss.

(v) Ist δ_X die diskrete Metrik auf einer Menge X, dann ist *jede* Teilmenge $U \subseteq X$ offen in (X,δ_X). Denn für jedes $x \in X$ ist der offene Ball $B_1(x) = \{x\}$ in U enthalten.

(3.2) Proposition Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\|\cdot\|'$ eine zu $\|\cdot\|$ äquivalente Norm. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ ist genau dann offen bezüglich der Norm $\|\cdot\|$, wenn sie bezüglich der Norm $\|\cdot\|'$ offen ist.

Beweis: Sei U eine bezüglich $\|\cdot\|$ offene Menge und $x \in U$. Weil U offen ist, gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Auf Grund der Äquivalenz der Normen gibt es eine Konstante $\gamma \in \mathbb{R}^+$ mit $\|v\| \le \gamma \|v\|'$ für alle $v \in V$. Bezeichnen wir nun mit $B' = B'_{\gamma^{-1}\varepsilon}(x)$ den offenen Ball um x vom Radius $\gamma^{-1}\varepsilon$ bezüglich $\|\cdot\|'$. Es gilt nun $B' \subseteq B_\varepsilon(x) \subseteq U$, denn für jedes $y \in B'$ gilt $\|y - x\|' < \gamma^{-1}\varepsilon$, damit $\|y - x\| \le \gamma \|y - x\|' < \gamma\gamma^{-1}\varepsilon = \varepsilon$ und somit $y \in B_\varepsilon(x)$. □

Betrachtet man einen endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V, ohne dass auf V explizit eine bestimmte Metrik angegeben wurde, dann ist mit der *Offenheit* einer Teilmenge $U \subseteq V$ immer die Offenheit bezüglich der von einer beliebigen Norm induzierten Metrik gemeint. Weil nach Satz (1.8) alle Normen auf V äquivalent sind, spielt die Wahl der Norm wegen Proposition (3.2) in diesem Fall keine Rolle.

Sei X eine Menge und $\mathfrak{P}(X)$ seine Potenzmenge, also die Menge aller Teilmengen von X. Im weitere Verlauf werden wir des öfteren mit *Familien* von Teilmengen arbeiten. Ein *Familie* von Teilmengen der Menge X über einer Indexmenge I ist einfach eine Abbildung $\phi : I \to \mathfrak{P}(X)$. Jedem Element aus I wird also eine Teilmenge von X zugeordnet.

In der Regel verwendet man an Stelle der Abbildung- die Indexschreibweise, wobei dann $(X_i)_{i \in I}$ für die Abbildung $I \to \mathfrak{P}(X)$, $i \mapsto X_i$ steht. Beispiele für Familien von Teilmengen der Menge $X = \mathbb{R}$ sind $(\,]n, n+1[\,)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(\{a, a + \frac{1}{3}\})_{a \in \mathbb{Z}}$. Elemente der zweiten Familie sind zum Beispiel $\{0, \frac{1}{3}\}$ oder $\{-2, -\frac{5}{3}\}$. Ein Element der ersten Familie ist das offene Intervall $]7, 8[$.

(3.3) Definition Sei X eine Menge und $\mathscr{T} \subseteq \mathfrak{P}(X)$. Man bezeichnet $\mathscr{T}$ als ***Topologie*** auf X, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Es gilt $\varnothing \in \mathscr{T}$ und $X \in \mathscr{T}$.

(ii) Für alle $U, V \in \mathscr{T}$ gilt $U \cap V \in \mathscr{T}$.

(iii) Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von X, wobei $U_i \in \mathscr{T}$ für jedes $i \in I$ gilt, dann ist auch die Vereinigung $\bigcup_{i \in I} U_i$ ein Element von $\mathscr{T}$.

Ein Paar $(X, \mathscr{T})$ bestehend aus einer Menge X und einer Topologie $\mathscr{T}$ auf X bezeichnet man als ***topologischen Raum***. Die Elemente von $\mathscr{T}$ werden auch als ***offene Teilmengen*** des topologischen Raums bezeichnet.

(3.4) Satz Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\mathscr{T}$ die Menge der in (X, d) offenen Teilmengen. Dann ist $\mathscr{T}$ eine Topologie auf X.

Beweis: Wir überprüfen, dass das Mengensystem $\mathscr{T}$ die Bedingungen (i), (ii) und (iii) in der Definition einer Topologie auf X erfüllt.

zu (i) Die Menge $Y = \varnothing$ ist offen, da in diesem Fall kein Punkt $x \in Y$ existiert, für den die Existenz eines $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq Y$ gefordert wird. Die Menge X ist offen, weil in diesem Fall für jedes $x \in X$ und jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ die Bedingung $B_\varepsilon(x) \subseteq X$ offensichtlich erfüllt ist; denn nach Definition ist $B_\varepsilon(x)$ eine Teilmenge von X.

zu (ii) Seien $U, V \in \mathscr{T}$. Zu zeigen ist, dass $U \cap V$ in $\mathscr{T}$ liegt, also offen im metrischen Raum (X, d) ist. Sei $x \in U \cap V$. Weil U offen ist, gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Weil V offen ist, existiert ein $\eta \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\eta(x) \subseteq V$. Setzen wir $\xi = \min(\varepsilon, \eta)$, dann folgt $B_\xi(x) \subseteq B_\varepsilon(x) \subseteq U$ und $B_\xi(x) \subseteq B_\eta(x) \subseteq V$, insgesamt also $B_\xi(x) \subseteq U \cap V$.

zu (iii) Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen $U_i \in \mathscr{T}$, also eine Familie von in (X, d) offenen Teilmengen. Zu zeigen ist, dass $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ in (X, d) offen ist. Sei dazu $x \in U$ vorgegeben. Dann gibt es ein $i \in I$ mit $x \in U_i$. Weil U_i offen ist, existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U_i$. Wegen $U_i \subseteq U$ folgt $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. □

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ in einem topologischen Raum $(X, \mathscr{T})$ wird ***abgeschlossen*** genannt, wenn die Menge $X \setminus A$ offen ist, also $X \setminus A \in \mathscr{T}$ gilt. Die Gleichungen $\varnothing = X \setminus X$ und $X = X \setminus \varnothing$ zeigen, dass $\varnothing$ und X nicht nur offene, sondern auch abgeschlossene Teilmengen in jedem topologischen Raum sind. Die Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen A, B ist abgeschlossen, denn es gilt $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$, und der Durchschnitt der beiden offenen Mengen $X \setminus A$, $X \setminus B$ ist offen. Der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} A_i$ einer Familie $(A_i)_{i \in I}$ abgeschlossener Teilmengen $A_i \subseteq X$ ist abgeschlossen, denn es gilt $X \setminus \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i)$, und die Vereinigung auf der rechten Seite der Gleichung ist offen.

Allerdings sind unendliche Vereinigungen abgeschlossener Teilmengen eines topologischen Raums im Allgemeinen nicht abgeschlossen. Beispielsweise ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Teilmenge $[\frac{1}{n}, 1]$ in $(\mathbb{R}, d_1)$ abgeschlossen, die Vereinigung $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\frac{1}{n}, 1] = \,]0, 1]$ aber nicht. Ebenso sind unendliche Durchschnitte offener Teilmengen im Allgemeinen nicht offen. Zum Beispiel ist $]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ offen in $(\mathbb{R}, d_1)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, aber $\bigcap_{n \in \mathbb{N}}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\, = \{0\}$ ist keine offene Teilmenge.

> **(3.5) Definition** Sei $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ wird ***Umgebung*** von x genannt, wenn eine offene Teilmenge V von X mit $x \in V$ und $V \subseteq U$ existiert.

Ist die Topologie $\mathscr{T}$ auf X durch eine Metrik gegeben, so ist $U \subseteq X$ genau dann eine Umgebung des Punktes $x \in X$, wenn ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ existiert. Die Implikation „$\Leftarrow$“ ist unmittelbar klar, denn $B_\varepsilon(x)$ ist eine offene Teilmenge von X mit $x \in B_\varepsilon(x)$. Zum Nachweis der Richtung „$\Rightarrow$“ setzen wir voraus, dass V eine offene Teilmenge von X mit $x \in V$ und $V \subseteq U$ ist. Auf Grund der Offenheit von V existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq V$. Dann gilt insbesondere $B_\varepsilon(x) \subseteq U$.

> **(3.6) Definition** Ein topologischer Raum $(X, \mathscr{T})$ wird ***hausdorffsch*** genannt, wenn für zwei beliebige verschiedene Punkte $x, y \in X$ jeweils Umgebungen U von x und V von y mit $U \cap V = \varnothing$ existieren.

Ist der topologische Raum $(X, \mathscr{T})$ durch eine Metrik d definiert, dann ist er hausdorffsch. Seien nämlich x und y zwei verschiedene Punkte von X. Dann ist $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x,y) \in \mathbb{R}^+$, und $U = B_\varepsilon(x)$ und $V = B_\varepsilon(y)$ sind Umgebungen von x bzw. y mit $U \cap V = \varnothing$. Wäre nämlich $z \in U \cap V$, dann müsste $d(x,z) < \varepsilon$ und $d(y,z) < \varepsilon$ gelten, und aus der Dreiecksungleichung würde sich der Widerspruch $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = d(x,y)$ ergeben. Es gibt aber topologische Räume, die nicht hausdorffsch sind, was zeigt, dass nicht jede Topologie durch eine Metrik definiert ist.

(i) Auf jeder Menge X existiert die ***triviale Topologie*** (auch indiskrete Topologie, chaotische Topologie oder Klumpentopologie genannt), gegeben durch $\mathscr{T} = \{\varnothing, X\}$. Sobald X mindestens zwei verschiedene Punkte x, y enthält, ist $(X, \mathscr{T})$ ein nicht-hausdorffscher topologischer Raum. Denn die einzige Umgebung von x ist die Menge X, und dasselbe gilt für y. Aber der Durchschnitt $X \cap X = X$ ist nicht die leere Menge.

(ii) Als weiteres konkretes Beispiel für einen nicht-hausdorffschen topologischen Raum betrachten wir $(X, \mathscr{T})$ gegeben durch $X = [1,2] \cap [3,4]$ und $\mathscr{T} = \{\varnothing, [1,2], [3,4], X\}$. Man kann leicht kontrollieren, dass durch $\mathscr{T}$ tatsächlich eine Topologie auf X definiert ist. Aber die Topologie ist nicht hausdorffsch. Denn die einzigen Umgebungen der Punkte 1 und 2 sind $[1,2]$ und X, und für alle $U, V \in \{[1,2], X\}$ ist der Durchschnitt $U \cap V$ jeweils nicht leer.

Mit Hilfe des Umgebungsbegriffs lässt sich die Konvergenz von Folgen definieren.

(3.7) Definition Sei $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum, $a \in X$ und $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X. Wir sagen, die Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ***konvergiert*** gegen den Punkt a und bezeichnen a als ***Grenzwert*** der Folge, wenn für jede Umgebung U von x in $(X, \mathscr{T})$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x^{(n)} \in U$ für alle $n \geq N$ erfüllt ist.

Ist a der einzige Grenzwert von $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, dann verwendet man auch in diesem Kontext die Notation $\lim_n x^{(n)} = a$. Allerdings kann es in einem topologischen Raum $(X, \mathscr{T})$ vorkommen, dass eine Folge mehrere Grenzwerte besitzt. Als Beispiel betrachten wir die konstante Folge gegeben durch $x^{(n)} = 1$ im topologischen Raum $(X, \mathscr{T})$ aus Beispiel (ii) von oben. Jeder Punkt $a \in [1,2]$ ist ein Grenzwert dieser Folge. Denn jede Umgebung U von a enthält das Intervall $[1,2]$, und folglich gilt $x^{(n)} \in U$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt aber

(3.8) Proposition Ist $(X, \mathscr{T})$ ein hausdorffscher topologischer Raum, dann besitzt jede Folge in X höchstens einen Grenzwert.

Beweis: Nehmen wir an, dass $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit zwei verschiedenen Grenzwerten $a, b \in X$ ist. Da $(X, \mathscr{T})$ hausdorffsch ist, gibt es Umgebungen U von a und V von b mit $U \cap V = \varnothing$. Da a ein Grenzwert der Folge ist, existiert ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $x^{(n)} \in U$ für alle $n \geq N_1$. Ebenso existiert ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $x^{(n)} \in V$ für alle $n \geq N_2$. Für $n = \max\{N_1, N_2\}$ muss dann $x^{(n)} \in U \cap V$ gelten. Aber das ist wegen $U \cap V = \varnothing$ unmöglich. □

Mit Hilfe von Folgengrenzwerten lässt sich ein notwendiges Kriterium für die Abgeschlossenheit einer Teilmenge formulieren.

(3.9) Satz Sei $(X,\mathscr{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$.

(i) Ist A abgeschlossen und $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A, die in X einen Grenzwert x besitzt, dann gilt $x \in A$.

(ii) Ist die Topologie $\mathscr{T}$ durch eine Metrik d definiert, dann gilt auch die Umkehrung: Liegt der Grenzwert jeder in A liegenden, in X konvergenten Folge in A, dann ist A eine abgeschlossene Teilmenge von X.

Beweis: zu (i) Nehmen wir an, dass der Grenzwert x der Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ nicht in A liegt. Wegen der Abgeschlossenheit von A ist die Teilmenge $U = X \setminus A$ offen und wegen $x \in U$ eine Umgebung von x. Auf Grund der Konvergenz existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x^{(n)} \in U$ für alle $n \geq N$. Aber dies widerspricht unserer Voraussetzung, dass $x^{(n)} \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

„$\Leftarrow$" Nehmen wir an, dass für jede in A liegende auch der Grenzwert in A liegt, dass aber A nicht abgeschlossen ist. Dann ist die Menge $U = X \setminus A$ nicht offen; existiert also ein Punkt $x \in U$ mit der Eigenschaft, dass $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ für kein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ erfüllt ist. Dies wiederum bedeutet, dass für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ der Durchschnitt $B_\varepsilon(x) \cap A$ nicht leer ist. Insbesondere finden wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x^{(n)} \in A \cap B_{\frac{1}{n}}(a)$. Wir erhalten so eine Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim x^{(n)} = a$, deren Folgenglieder alle in A liegen, mit einem Grenzwert $x \notin A$. Dies widerspricht unserer Annahme. □

Beispielsweise ist das Intervall $I = [0,1[$ nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}$. Die Zahlen $x^{(n)} = 1 - \frac{1}{n}$ bilden eine Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in I, aber deren Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = 1$ ist nicht in I enthalten.

(3.10) Definition Sei $(X,\mathscr{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge.

(i) Man nennt x einen ***inneren Punkt*** von A, wenn x eine Umgebung U mit $U \subseteq A$ besitzt. Die Menge der inneren Punkte von A wird mit A° bezeichnet und das ***Innere*** von A genannt.

(ii) Ein Punkt $x \in X$ liegt im ***Abschluss*** $\bar{A}$ von A, wenn für jede Umgebung U von x der Durchschnitt $A \cap U$ nicht leer ist.

(iii) Die Menge $\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$ wird der ***Rand*** von A genannt.

Man beachte, dass A° leer sein kann; dies gilt zum Beispiel für jede einelementige Teilmenge von $\mathbb{R}$, oder für jede Teilmenge von $\mathbb{R}^3$, die in einer Ebene enthalten ist. Ebenso ist $\bar{A} = X$ möglich. Wenn das der Fall ist, bezeichnet man A als ***dichte*** Teilmenge von $\mathbb{R}$. Beispielsweise ist $\mathbb{Q}$ eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$ bezüglich der Standard-Metrik d_1.

(3.11) Proposition Sei $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge.

(i) Die Menge A° ist die größte offene Teilmenge von X, die in A enthalten ist. Ist also $U \subseteq A$ offen in X, dann gilt $U \subseteq A^\circ$.

(ii) Die Menge $\bar{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die A enthält. Ist also $Z \subseteq X$ eine beliebige abgeschlossene Teilmenge mit $Z \subseteq A$, dann folgt $\bar{A} \subseteq Z$.

(iii) Ein Punkt $x \in X$ gehört genau dann zum Rand ∂A, wenn jede Umgebung U von x jeweils mindestens einen Punkt von A und einen Punkt des Komplements $X \setminus A$ enthält.

Beweis: zu (i) Zunächst einmal gilt $A^\circ \subseteq A$. Ist nämlich $x \in A^\circ$ und U eine Umgebung von x mit $U \subseteq A$, dann gilt $x \in U$ und somit $x \in A$. Die Menge A° ist auch offen. Für jeden Punkt $x \in A^\circ$ gibt es nämlich eine Umgebung U_x von x mit $U_x \subseteq A$ und (nach Definition des Umgebungsbegriffs) eine offene Menge V_x mit $x \in V_x$ und $V_x \subseteq U_x \subseteq A$. Die Menge V_x ist nicht nur Umgebung von x, sondern auch Umgebung jedes ihrer Punkte. Es gilt also $V_x \subseteq A^\circ$ und somit auch $\bigcup_{x \in A^\circ} V_x \subseteq A^\circ$. Aus $x \in V_x$ für alle $x \in A^\circ$ folgt andererseits $A^\circ \subseteq \bigcup_{x \in A^\circ} V_x$. Die Gleichung $A^\circ = \bigcup_{x \in A^\circ} V_x$ zeigt, dass A° (als Vereinigung offener Teilmengen) selbst offen ist.

Sei nun U eine beliebige offene Teilmenge von X mit $U \subseteq A$, und sei $x \in U$. Weil U eine Umgebung von x für jedes $x \in U$ ist, besteht U vollständig aus inneren Punkten, es gilt also $U \subseteq A^\circ$. Dies zeigt, dass A° die größte offene Teilmenge von X ist, die in A enthalten ist.

zu (ii) Ist $x \in A$, dann gilt $x \in U \cap A$ für jede Umgebung U von x und somit $U \cap A \neq \varnothing$. Dies zeigt, dass x in $\bar{A}$ liegt. Damit ist $A \subseteq \bar{A}$ nachgewiesen. Nun zeigen wir, dass $\bar{A}$ abgeschlossen ist, indem wir nachweisen, dass $U = X \setminus \bar{A}$ eine offene Teilmenge ist. Ist $x \in U$ vorgegeben, dann existiert (wegen $x \notin \bar{A}$) eine Umgebung V_x von x mit $V_x \cap A = \varnothing$, und somit auch eine offene Menge W_x mit $x \in W_x$ und $W_x \cap A = \varnothing$, also $W_x \subseteq U$. Es gilt also $\bigcup_{x \in U} W_x \subseteq U$, andererseits aber auch $U \subseteq \bigcup_{x \in U} W_x$ wegen $x \in W_x$ für alle $x \in U$. Die Gleichung $U = \bigcup_{x \in U} W_x$ zeigt, dass U tatsächlich offen ist.

Nun zeigen wir noch, dass $\bar{A}$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X ist, die A enthält. Sei $Z \subseteq X$ abgeschlossen mit $Z \supseteq A$, und nehmen wir an, dass $\bar{A}$ keine Teilmenge von Z ist. Dann gibt es einen Punkt $x \in \bar{A} \setminus Z$. Setzen wir $U = X \setminus Z$, dann ist U offen, und es gilt $x \in U$. Außerdem folgt aus $A \subseteq Z$, dass $U \cap A = \varnothing$ gilt. Somit ist U eine Umgebung von x, die mit A leeren Durchschnitt besitzt; aber dies steht zur Annahme $x \in \bar{A}$ im Widerspruch.

zu (iii) „$\Rightarrow$“ Sei $x \in \partial A$. Dann gilt insbesondere $x \in \bar{A}$, somit enthält jede Umgebung U von x einen Punkt aus A. Nehmen wir nun an, es gibt eine Umgebung U, die keinen Punkt des Komplements $X \setminus A$ enthält. Dann folgt daraus $U \subseteq A$. Aber dies würde bedeuten, dass x ein innerer Punkt von A ist, was der Annahme $x \in \partial A$ widerspricht.

„$\Leftarrow$“ Weil nach Voraussetzung jede Umgebung U von x einen Punkt aus A enthält, gilt $x \in \bar{A}$. Nehmen wir nun $x \in A^\circ$. Dann gibt es eine Umgebung U von x mit $U \subseteq A$. Aber dies bedeutet, dass U mit $X \setminus A$ leeren Durchschnitt hat, im Widerspruch zur Voraussetzung. Insgesamt ist x also in $\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$ enthalten. □

Kommen wir nun zum Stetigkeitsbegriff im Zusammenhang mit topologischen Räumen.

(3.12) Definition Seien $(X,\mathscr{T})$ und $(Y,\mathscr{U})$ topologische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung, und sei $a \in X$. Wir bezeichnen f als ***stetig im Punkt*** a, wenn für jede Umgebung V von $f(a)$ in $(Y,\mathscr{U})$ eine Umgebung U von a in $(X,\mathscr{T})$ mit $f(U) \subseteq V$ existiert. Die Funktion f wird ingesamt als ***stetig*** bezeichnet, wenn sie in jedem Punkt von X stetig ist.

Diese Definition ist das natürliche Analogon zum ε-δ-Kriterium in $\mathbb{R}$ oder (allgemeiner) in metrischen Räumen. Es sei daran erinnert, dass die intuitive und ungenauer Formulierung dieses Kriteriums lautet: „Wenn ein Punkt x nahe bei a liegt, dann liegt $f(x)$ nahe bei $f(a)$." Die „Nähe" kommt bei der neuen Formulierung durch den Umgebungsbegriff zum Ausdruck: Dass x nahe bei a liegen soll, wird durch die Forderung $x \in U$ konkretisiert, und dass sich $f(x)$ nahe bei $f(a)$ befindet, wird durch $f(x) \in V$ ausgedrückt. Die Gültigkeit der Implikation $x \in U \Rightarrow f(x) \in V$ wiederum ist äquivalent zu $f(U) \subseteq V$.

Sind die Topologien $\mathscr{T}$ auf X und $\mathscr{Y}$ auf Y durch Metriken d_X und d_Y gegeben, dann ist die neue Formulierung tatsächlich auch äquivalent zum Stetigkeitsbegriff aus § 9: Setzen wir zunächst voraus, dass $f : X \to Y$ stetig im Punkt a als Abbildung zwischen den metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) ist. Dies ist gleichbedeutend mit der Gültigkeit des ε-δ-Kriteriums an der Stelle a. Sei nun V eine Umgebung von $f(a)$ in $(Y,\mathscr{U})$. Dann existiert eine offene Teilmenge V' von Y mit $f(a) \in V'$ und $V' \subseteq V$. Weil die Topologie $\mathscr{U}$ durch die Metrik d_Y definiert ist, bedeutet dies wiederum, dass ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass der offene Ball $B_{Y,\varepsilon}(f(a))$ von Radius ε um $f(a)$ bezüglich d_Y in V', und somit auch in V, enthalten ist. Durch Anwendung des ε-δ-Kriteriums erhalten wir nun ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit der Eigenschaft, dass für alle $x \in X$ die Implikation $d_X(a,x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x))$ erfüllt ist. Setzen wir $U = B_{X,\delta}(a)$, dann ist U eine Umgebung von a in $(X,\mathscr{T})$, denn nach Definition der Topologie $\mathscr{T}$ ist U eine offene Teilmenge von X, die a enthält. Die Implikation ist gleichbedeutend mit $f(B_{X,\delta}(a)) \subseteq B_{Y,\varepsilon}(f(a))$, und wir erhalten insgesamt $f(U) \subseteq B_{Y,\varepsilon}(f(a)) \subseteq V' \subseteq V$. Dies zeigt, dass f stetig als Abbildung zwischen den topologischen Räumen $(X,\mathscr{T})$ und $(Y,\mathscr{U})$ im Sinne von Definition (3.12) ist.

Setzen wir nun umgekehrt voraus, dass f in diesem Sinne stetig im Punkt a ist. Wir zeigen, dass f als Abbildung zwischen den metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) bezüglich a das ε-δ-Kriterium erfüllt und somit als Abbildung zwischen den metrischen Räumen stetig ist. Sei dazu $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Dann ist $V = B_{Y,\varepsilon}(f(a))$ eine (offene) Umgebung des Punktes $f(a)$ im topologischen Raum $(Y,\mathscr{U})$. Auf Grund der Stetigkeit existiert eine Umgebung U von a in $(X,\mathscr{T})$ mit $f(U) \subseteq V$. Da es sich bei U um eine Umgebung handelt, existiert eine in $(X,\mathscr{T})$ offene Teilmenge U' mit $a \in U'$ und $U' \subseteq U$. Dies wiederum bedeutet nach Definition der Topologie $\mathscr{T}$, dass ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit $B_{X,\delta}(a) \subseteq U'$ existiert. Es gilt dann $f(B_{X,\delta}(a)) \subseteq f(U') \subseteq f(U) \subseteq V = B_{Y,\varepsilon}(f(a))$. Für alle $x \in X$ gilt also die Implikationskette

$$d(a,x) < \delta \quad \Rightarrow \quad x \in B_{X,\delta}(a) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in B_{Y,\varepsilon}(f(a)) \quad \Rightarrow \quad d(f(a), f(x)) < \varepsilon \quad ,$$

mit anderen Worten, das ε-δ-Kriterium ist erfüllt.

(3.13) Proposition Seien $(X,\mathscr{T})$ und $(Y,\mathscr{U})$ topologische Räume. Für eine Abbildung $f:X\to Y$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) Die Abbildung f ist stetig.

(ii) Für jede offene Teilmenge V in $(Y,\mathscr{U})$ ist $f^{-1}(V)$ offen.

(iii) Für jede abgeschlossene Teilmenge A in $(Y,\mathscr{U})$ ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

Beweis: Die Äquivalenz „(ii) $\Leftrightarrow$ (iii)“ folgt direkt aus der Tatsache, dass für jede Teilmenge $B\subseteq Y$ jeweils $f^{-1}(Y\setminus B)=X\setminus f^{-1}(B)$ gilt. Tatsächlich gilt für jedes $x\in X$ die Äquivalenz

$$x\in f^{-1}(Y\setminus B) \quad\Leftrightarrow\quad f(x)\in Y\setminus B \quad\Leftrightarrow\quad f(x)\notin B \quad\Leftrightarrow\quad x\notin f^{-1}(B) \quad\Leftrightarrow\quad x\in X\setminus f^{-1}(B).$$

Zum Beweis von „(ii) $\Rightarrow$ (iii)“ setzen wir nun voraus, dass $f^{-1}(V)$ für jede offene Teilmenge von Y offen ist. Ist A eine abgeschlossene Teilmenge von Y, dann ist $Y\setminus A$ offen. Auf Grund der Voraussetzung ist dann auch $f^{-1}(Y\setminus A)=X\setminus f^{-1}(A)$ offen, und dies wiederum ist gleichbedeutend mit der Abgeschlossenheit von $f^{-1}(A)$. Der Beweis der Implikation „(iii) $\Rightarrow$ (ii)“ läuft vollkommen analog.

Beweisen wir nun die Implikation „(i) $\Rightarrow$ (ii)“. Auf Grund der Voraussetzung ist $f:X\to Y$ in jedem Punkt $a\in X$ stetig. Sei nun $V\subseteq Y$ eine offene Teilmenge; wir müssen zeigen, dass $f^{-1}(V)$ in $(X,\mathscr{T})$ offen ist. Für jeden Punkt $a\in f^{-1}(V)$ ist V eine Umgebung von $f(a)$. Es existiert deshalb eine Umgebung U_a von a in $(X,\mathscr{T})$ mit $f(U_a)\subseteq V$. Nach Definition des Umgebungsbegriffs wiederum gibt es eine offene Teilmenge U'_a mit $U'_a\subseteq U_a$ und $a\in U'_a$. Aus $f(U'_a)\subseteq f(U_a)\subseteq V$ folgt $U'_a\subseteq f^{-1}(V)$. Insgesamt erhalten wir damit $\bigcup_{a\in f^{-1}(V)}U'_a\subseteq f^{-1}(V)$, und wegen $a\in f^{-1}(U'_a)$ für alle $a\in f^{-1}(V)$ gilt andererseits auch $f^{-1}(V)\subseteq\bigcup_{a\in f^{-1}(V)}U'_a$. Die Gleichung $f^{-1}(V)=\bigcup_{a\in f^{-1}(V)}U'_a$ zeigt, dass $f^{-1}(V)$ offen ist, als Vereinigung der offenen Teilmengen U'_a mit $a\in f^{-1}(V)$.

Nun beweisen wir noch die Implikation „(ii) $\Rightarrow$ (i)“. Unter Verwendung der Voraussetzung (ii) müssen wir zeigen, dass f in jedem Punkt von X stetig ist. Sei also $a\in X$ vorgegeben, und sei V eine Umgebung von $f(a)$ in $(Y,\mathscr{U})$. Dann gibt es eine offene Teilmenge V' von Y mit $f(a)\in V'$ und $V'\subseteq V$. auf Grund unserer Voraussetzung ist $f^{-1}(V')$ offen. Wegen $f(a)\in V'$ gilt außerdem $a\in f^{-1}(V')$, also ist $U=f^{-1}(V')$ eine Umgebung von a. Die Inklusion $f(U)\subseteq V'\subseteq V$ zeigt, dass f tatsächlich in a stetig ist. □

Ist $(X,\mathscr{T})$ ein topologischer Raum, dann existiert auf natürliche Weise eine Topologie auf jeder Teilmenge von X.

(3.14) Satz Sei $(X,\mathscr{T})$ ein topologischer Raum und $A\subseteq X$ eine Teilmenge. Es sei $\mathscr{T}_A$ die Menge aller Teilmengen der Form $U\cap A$ mit $U\in\mathscr{T}$. Dann ist $(A,\mathscr{T}_A)$ ein topologischer Raum. Man nennt $\mathscr{T}_A$ die auf A ***induzierte*** Topologie.

Beweis: Wir überprüfen die einzelnen Punkte aus Definition (3.3). Wegen $\varnothing\cap A=\varnothing$ und $X\cap A=A$ sind $\varnothing$ und A in $\mathscr{T}_A$ enthalten. Seien nun $U_A,V_A\in\mathscr{T}_A$ vorgegeben. Dann gibt es $U,V\in\mathscr{T}$ mit $U_A=U\cap A$ und $V_A=V\cap A$. Wegen $U_A\cap V_A=(U\cap A)\cap(V\cap A)=(U\cap V)\cap A$ und $U\cap V\in\mathscr{T}$ ist auch $U_A\cap V_A$ in $\mathscr{T}_A$ enthalten.

Sei nun $(U_{A,i})_{i\in I}$ eine Familie in $\mathscr{T}_A$. Dann gibt es für jedes $i \in I$ ein $U_i \in \mathscr{T}$ mit $U_{A,i} = U_i \cap A$, und $\bigcup_{i\in I} U_i$ ist in $\mathscr{T}$ enthalten. Die Gleichung $\bigcup_{i\in I} U_{A,i} = \bigcup_{i\in I}(U_i \cap A) = \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) \cap A$ zeigt nun, dass auch die Vereinigung $\bigcup_{i\in I} U_{A,i}$ in $\mathscr{T}_A$ enthalten ist. □

Ist die Topologie auf X durch eine Metrik definiert, dann lässt sich die auf $A \subseteq X$ induzierte Topologie ebenfalls durch eine Metrik beschreiben.

> **(3.15) Satz** Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Sei $\mathscr{T}$ die durch d definierte Topologie, und sei $\mathscr{T}_A$ die auf A induzierte Topologie. Dann ist $d_A = d|_{A\times A}$ eine Metrik auf A, und $\mathscr{T}_A$ ist genau die durch d_A definierte Topologie.

Beweis: Weil d eine Metrik auf X ist, gelten für alle $x,y,z \in X$ die Aussagen $x = y \Leftrightarrow d(x,y) = 0$, $d(x,y) = d(y,x)$ und $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$. Insbesondere gelten diese Aussagen für alle $x,y,z \in A$. Dies zeigt, dass $d_A = d|_{A\times A}$ eine Metrik auf A ist.

Sei nun $U \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge. Wir müssen zeigen, dass genau dann $U \in \mathscr{T}_A$ gilt, wenn U im metrischen Raum (A,d_A) eine offene Teilmenge ist. Setzen wir $U \in \mathscr{T}_A$ voraus, und sei $a \in A$ beliebig vorgegeben. Wir müssen zeigen, dass ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_{A,\varepsilon}(a) \subseteq U$ existiert, wobei $B_{A,\varepsilon}(a)$ den offenen Ball vom Radius ε um a im metrischen Raum (A,d_A) bezeichnet. Nach Definition von $\mathscr{T}_A$ existiert ein Element $U' \in \mathscr{T}$ mit $U = U' \cap A$. Weil U in (X,d) offen ist, existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(a) \subseteq U'$, wobei $B_\varepsilon(a)$ den offenen Ball vom Radius ε um a in (X,d) bezeichnet. Für alle $x \in X$ gilt nun die Implikation

$$\begin{aligned} x \in B_{A,\varepsilon}(a) \quad &\Rightarrow \quad x \in A \wedge d_A(a,x) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad x \in A \wedge d(a,x) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad x \in A \wedge x \in B_\varepsilon(a) \\ &\Rightarrow \quad x \in A \wedge x \in U' \quad \Rightarrow \quad x \in U' \cap A \quad \Rightarrow \quad x \in U. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass tatsächlich $B_{A,\varepsilon}(a) \subseteq U$ erfüllt ist.

Setzen wir nun umgekehrt voraus, dass U offen in (A,d_A) ist. Für jeden Punkt $a \in U$ gibt es ein $\varepsilon_a \in \mathbb{R}^+$ mit $B_{A,\varepsilon_a}(a) \subseteq U$. Die Menge U stimmt dann mit der Vereinigung $\bigcup_{a\in U} B_{A,\varepsilon_a}(a)$ überein. Außerdem ist $B_{A,\varepsilon_a}(a) = B_{\varepsilon_a}(a) \cap A$ für jedes $a \in U$, denn für alle $x \in X$ gilt die Äquivalenz

$$\begin{aligned} x \in B_{\varepsilon_a}(a) \cap A \quad &\Leftrightarrow \quad x \in B_{\varepsilon_a}(a) \wedge x \in A \quad \Leftrightarrow \quad d(a,x) < \varepsilon_a \wedge x \in A \\ &\Leftrightarrow \quad d_A(a,x) < \varepsilon_a \wedge x \in A \quad \Leftrightarrow \quad x \in B_{A,\varepsilon_a}(a). \end{aligned}$$

Als Vereinigung offener Mengen ist $U' = \bigcup_{a\in U} B_{\varepsilon_a}(a)$ offen in X. Die Gleichung

$$U \quad = \quad \bigcup_{a\in U} B_{A,\varepsilon_a}(a) \quad = \quad \bigcup_{a\in U} (B_{\varepsilon_a}(a) \cap A) \quad = \quad \left(\bigcup_{a\in U} (B_{\varepsilon_a}(a) \right) \cap A \quad = \quad U' \cap A$$

zeigt nun, dass U somit in $\mathscr{T}_A$ enthalten ist. □

Als konkretes Beispiel betrachten wir $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ mit der durch die Norm $\|\cdot\|_\infty$ induzierten Metrik d_∞ und die Teilmenge $A = \mathbb{R} \times \{0\}$. Nach Satz (3.15) erhalten wir eine Metrik d_A auf A durch

$$\begin{aligned} d_A((x,0),(y,0)) &= d_\infty((x,0),(y,0)) = \|(x,0)-(y,0)\|_\infty = \|(x-y,0\|_\infty \\ &= \max\{|x-y|,0\} = |x-y|. \end{aligned}$$

Identifizieren wir A mit $\mathbb{R}$ über die Bijektion $\mathbb{R} \to A$, $x \mapsto (x,0)$, dann entspricht d_A der Standardmetrik d_1 auf $\mathbb{R}$. Genauso, wie wir am Anfang des Kapitels gezeigt haben, dass offene Intervalle in $\mathbb{R}$ offene Teilmengen des metrischen Raums $(\mathbb{R}, d_1)$ sind, kann man hier überprüfen, dass zum Beispiel $U_A =]0,1[\times \{0\}$ eine offene Teilmenge im metrischen Raum (A, d_A) ist. Auf Grund des Satzes kann dies auch alternativ daraus gefolgert werden, dass $U =]0,1[\times \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge von $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ ist (was natürlich gezeigt werden muss) und $U_A = U \cap A$ gilt.

Andererseits ist U_A natürlich keine offene Teilmenge von $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$. Wäre dies der Fall, dann müsste es zum Beispiel ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ geben, so dass der offene Ball $B_\varepsilon((\frac{1}{2},0))$ vom Radius ε um $(\frac{1}{2},0)$ bezüglich d_∞ in U_A enthalten ist. Aber wegen $d_\infty((\frac{1}{2},0),(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\varepsilon)) = \max\{|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}|,|0-\frac{1}{2}\varepsilon|\} = \max\{0,\frac{1}{2}\varepsilon\} = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$ liegt der Punkt $(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\varepsilon)$ in $B_\varepsilon((\frac{1}{2},0))$, ohne ein Element von U_A zu sein.

Literaturverzeichnis

[BF] M. Barner, F. Flor, *Analysis II*. de Gruyter Lehrbuch.

[Fo] O. Forster, *Analysis 2*. vieweg studium - Grundkurs Mathematik.

[He] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*. Teubner-Verlag.

[Kö] K. Königsberger, *Analysis 2*. Springer-Verlag.