Proposition (6.1)

Sei G eine Gruppe, N ein Normalteiler und U eine Untergruppe von G. Dann ist jedem $u \in U$ durch $\tau_u(n) = unu^{-1}$ ein Automorphismus von N zugeordnet. Die Abbildung

$$\phi : U \to \mathrm{Aut}(N), \quad u \mapsto \tau_u$$

ist ein Homomorphismus von Gruppen.

Innere semidirekte und direkte Produkte

Proposition (6.2)

Sei G eine Gruppe und inneres semidirektes Produkt von $N \trianglelefteq G$ und $U \leq G$. Unter diesen Voraussetzungen ist G genau dann ein inneres direktes Produkt von N und U, wenn $\phi(u) = \mathrm{id}_N$ für alle $u \in U$ gilt, wobei ϕ den Homomorphismus aus Proposition 6.1 bezeichnet.

Erinnerung: $\phi : U \to \mathrm{Aut}(N)$, $u \mapsto \tau_u$

wobei τ_u def. ist durch $\tau_u(n) = unu^{-1}$

Beweis von Proposition 6.2:

„$\Leftarrow$" Vor. $\phi(u) = id_N$ $\forall u \in U$ Für alle $n \in N$ und $u \in U$ gilt somit $unu^{-1} = \tau_u(n) = \phi(u)(n) = id_N(n) = n$. (*)

Sei $g \in G$ und $u \in U$. z.zg: $gug^{-1} \in U$ (daraus folgt dann $U \trianglelefteq G$, und insges. ist G dann inneres direktes Produkt von N und U) $G = NU \Rightarrow \exists n \in N, u_1 \in U$ mit $g = nu_1$ z.zg. also: $nu_1u(nu_1)^{-1} = nu_1uu_1^{-1}n^{-1}$

Produkt von N und U) $G = NU \Rightarrow \exists\, n \in N,\ u_1 \in U$

mit $g = nu$

liegt in U $U \trianglelefteq G \Rightarrow u_2 = u_1 u u_1^{-1}$ liegt in U

Wegen $(*)$, angewendet auf n und u_2, gilt

$n u_1 u u_1^{-1} n^{-1} = n u_2 n^{-1} = u_2 n n^{-1} = u_2 \cdot e = u_2 \in U$.

„$\Rightarrow$" Vor.: $U \trianglelefteq G$ (und $N \trianglelefteq G$)

z.zg. $\phi(u) = \mathrm{id}_N \ \forall u \in U$, gleichbed. $\phi(u)(n) = n$,

für alle $u \in U$ und $n \in N$ bzw. $unu^{-1} = \tau_u(n) = n \ \forall n \in N, u \in U$

Betrachte für bel. $u \in U$, $n \in N$ $unu^{-1}n^{-1}$. z.zg. Dieses

Element ist gleich e. $N \trianglelefteq G \Rightarrow unu^{-1} \in N \Rightarrow$

$unu^{-1}n^{-1} \in N$ Genauso folgt aus $U \trianglelefteq G$, dass $unu^{-1}n^{-1}$

in U liegt insges.: $unu^{-1}n^{-1} \in N \cap U$ $N \cap U = \{e\}$

$\Rightarrow unu^{-1}n^{-1} = e$ □

Das äußere semidirekte Produkt

Satz (6.3)

Seien U und N Gruppen und $\phi : U \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Homomorphismus. Wir definieren auf $N \times U$ eine Verknüpfung $*$ durch

$$(n_1, u_1) * (n_2, u_2) \quad = \quad (n_1 \phi(u_1)(n_2), u_1 u_2)$$

für $(n_1, u_1), (n_2, u_2) \in N \times U$. Dann ist $(N \times U, *)$ eine Gruppe. Man nennt sie das äußere semidirekte Produkt von N und U und bezeichnet sie mit $N \rtimes_\phi U$.

Merkhilfe:

$$(n_1, u_1) * (n_2, u_2) = (n_1 \cdot \phi(u_1)(n_2),\ u_1 u_2)$$

$n_2 \mapsto \phi(u_1)(n_2)$

Beispiel: äußeres semidirektes Produkt von

$N = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ mit $n \geq 3$, $U = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$

Durch $\iota: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $a + n\mathbb{Z} \mapsto (-a) + n\mathbb{Z}$

ist ein Automorphismus von $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ gegeben

Die Abb $\phi: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ geg

durch $\phi(0 + 2\mathbb{Z}) = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ und $\phi(1 + n\mathbb{Z}) = \iota$

ist ein Gruppenhom. definiert

Definiere nun das semidirekte Produkt $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times_\phi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$= \{(\bar{a}, \bar{b}) \mid \bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \bar{b} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$. Betrachte die Elemente

$g = (\bar{1}, \bar{0}) = (1+n\mathbb{Z}, 0+2\mathbb{Z})$, $h = (\bar{0}, \bar{1}) = (0+n\mathbb{Z}, 1+2\mathbb{Z})$.

$g * g = (\bar{1}, \bar{0}) * (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{1} + \phi(\bar{0})(\bar{1}), \bar{0}+\bar{0}) = (\bar{1} + id_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\bar{1}), \bar{0})$

$= (\bar{1}+\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{2}, \bar{0})$ also $g^2 = (\bar{2}, \bar{0})$ ebenso: $g^3 = g^2 * g$

$= (\bar{2}, \bar{0}) * (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{2} + \phi(\bar{0})(\bar{1}), \bar{0}+\bar{0}) = (\bar{2} + id_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\bar{1}), \bar{0})$

$= (\bar{2}+\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{3}, \bar{0})$, $g^4 = \ldots = (\bar{4}, \bar{0})$, ...

$h * h = (\bar{0}, \bar{1}) * (\bar{0}, \bar{1}) = (\bar{0} + \phi(\bar{1})(\bar{0}), \bar{1}+\bar{1}) = (\bar{0} + 4(\bar{0}), \bar{2})$

$= (\bar{0}, \bar{0})$, $g * h = (\bar{1}, \bar{0}) * (\bar{0}, \bar{1}) = (\bar{1} + \phi(\bar{0})(\bar{0}), \bar{0}+\bar{1})$

$= (\bar{1} + id_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\bar{0}), \bar{1}) = (\bar{1}+\bar{0}, \bar{1}) = (\bar{1}, \bar{1})$

$$(g * h)^2 = (\bar{1}, \bar{1}) * (\bar{1}, \bar{1}) = (\bar{1} + \phi(\bar{1})(\bar{1}) \,.\, \bar{1} + \bar{1})$$

$$= (\bar{1} + \iota(\bar{1}), \bar{2}) = (\bar{1} + (-\bar{1}) \,;\, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$$

Beweis von Satz 6.3:

Assoziativgesetz: Seien $(n_1, u_1), (n_2, u_2), (n_3, u_3) \in N \times_\phi U$ vorgegeben. z.zg.:

$$((n_1,u_1) * (n_2,u_2)) * (n_3,u_3) = (n_1,u_1) * ((n_2,u_2) * (n_3,u_3))$$

linke Seite:

$$((n_1,u_1) * (n_2,u_2)) * (n_3,u_3) = (n_1 \phi(u_1)(n_2), u_1u_2) * (n_3, u_3)$$

$$= (n_1 \phi(u_1)(n_2) \cdot \phi(u_1u_2)(n_3), u_1u_2u_3)$$

rechte Seite:

$$(n_1,u_1) * ((n_2,u_2) * (n_3,u_3)) = (n_1,u_1) * (n_2 \phi(u_2)(n_3), u_2u_3)$$

$$= (n_1 \phi(u_1)(n_2 \phi(u_2)(n_3)), u_1u_2u_3) =$$

$$(n_1 \phi(u_1)(n_2) \cdot \phi(u_1)\big(\phi(u_2)(n_3)\big),\ u_1 u_2 u_3) =$$

$$(n_1 \phi(u_1)(n_2) \cdot (\phi(u_1) \circ \phi(u_2))(n_3)),\ u_1 u_2 u_3 =$$

$$(n_1 \phi(u_1)(n_2)\ \phi(u_1 u_2)(n_3),\ u_1 u_2 u_3)$$

Neutralelement: überprüfe für vorgeg. $(n,u) \in N \rtimes_\phi U$ die Gleichungen

$(n,u) * (e_N, e_U) = (n,u)$ und $(e_N, e_U) * (n,u) = (n,u)$

Tatsächlich gilt $(n,u) * (e_N, e_U) = (n \phi(u)(e_N),\ u * e_U)$

$= (n \cdot e_N,\ u) = (n,u)$ und $(e_N, e_U) * (n,u) =$

$(e_N \cdot \phi(e_U)(n),\ e_U \cdot u) = (e_N \cdot id_N(n),\ u)$

$= (e_N \cdot n,\ u) = (n,u)$

Inneres und äußeres semidirektes Produkt

Satz (6.4)

Sei G eine Gruppe, U eine Untergruppe und N ein Normalteiler von G. Wir setzen voraus, dass G das innere semidirekte Produkt N und U ist. Definieren wir $\phi : U \to \mathrm{Aut}(N)$ wie in Proposition 6.1, dann ist durch $(n, u) \mapsto nu$ ein Isomorphismus $N \rtimes_\phi U \cong G$ definiert.

$(\phi(u^{-1})(e_N), e_U) = (e_N, e_U)$. □

Beweis von Satz 6.4:

z.zg: $\Psi : N \rtimes_\phi U \to G,\ (n,u) \mapsto nu$ ist ein Isomorphismus

überprüfe: (1) Ψ ist surjektiv (2) Ψ ist inj. (3) Ψ ist Hom.

zu (1) Sei $g \in G$. G inn. semidir. Prod., insb. $G = NU \underset{g \in NU}{\Rightarrow} \exists n \in N,$
$u \in U$ mit $g = nu \Rightarrow \Psi(n,u) = nu = g$

zu (2) Seien $(n,u), (n_1,u_1) \in N \rtimes_\phi U$ mit $\Psi(n,u) = \Psi(n_1,u_1)$

$\Rightarrow nu = n_1u_1 \Rightarrow u = n^{-1}n_1u_1 \Rightarrow uu_1^{-1} = n^{-1}n_1 \in N \cap U$

$N \cap U = \{e\}$ $\Rightarrow uu_1^{-1} = e,\ n^{-1}n_1 = e \Rightarrow u = u_1, n = n_1 \Rightarrow (n,u) = (n_1,u_1)$

zu (3) Seien $(n,u), (n_1,u_1) \in N \rtimes_\phi U$. $\Psi((n,u) * (n_1,u_1)) =$

$\Psi(n\phi(u)(n_1), uu_1) = \Psi(n\tau_u(n_1), uu_1) = \Psi(nun_1u^{-1}, uu_1) =$

$nunu^{-1}uu_1 = nun_1u_1 = \Psi(n,u) \circ \Psi(n_1,u_1)$ □

Die Diedergruppen als semidirektes Produkt

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist durch $\iota(a + n\mathbb{Z}) = (-a) + n\mathbb{Z}$ ein Automorphismus der Gruppe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ definiert. Desweiteren erhält man durch

$$\phi(0 + 2\mathbb{Z}) = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \quad , \quad \phi(1 + 2\mathbb{Z}) = \iota$$

einen Gruppenhomomorphismus $\phi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Proposition (6.5)

Für jedes $n \geq 3$ ist die Diedergruppe D_n ist isomorph zum semidirekten Produkt $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_\phi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Beweis von Proposition 6.5:

bekannt: $D_n = \langle \rho, \tau \rangle$ (wobei ρ Drehung, τ Spiegelung)

$N = \langle \rho \rangle$ ist Normalteiler von D_n, $U = \langle \tau \rangle = \{id, \tau\}$

$\tau \notin N \Rightarrow N \cap U = \{id\}$ Darüber hinaus wurde gezeigt, dass D_n das Komplexprod. NU von N und U ist

$\Rightarrow D_n$ ist inneres semidirektes Produkt von N und U

Satz 6.4 $\Rightarrow D_n \cong N \rtimes_{\phi_0} U$ wobei $\phi_0 : U \to \mathrm{Aut}(N)$ definiert ist wie in Satz 6.1 noch zu zeigen:

$$N \rtimes_{\phi_0} U \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$\operatorname{ord}(\rho) = n = \operatorname{ord}(1+n\mathbb{Z}) \Rightarrow$ Es gibt einen eind. best. Hom. $N \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, der ρ auf $1+n\mathbb{Z}$ abbildet. Dieser bildet ρ^a auf $a+n\mathbb{Z}$ ab für jedes $a \in \mathbb{Z}$ und ist offenbar bijektiv.
Genau sieht man, dass eine Bij. $U \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ existiert, die τ^b auf $b+2\mathbb{Z}$ abbildet, für jedes $b \in \mathbb{Z}$, insgesamt:
erhalte eine Bijektion $\Psi: N \times U \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,
$(\rho^a, \tau^b) \mapsto (a+n\mathbb{Z}, b+2\mathbb{Z})$. Überprüfen: Diese Abb. ist ein Hom. zwischen $N \rtimes_{\phi_0} U$ und $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Es gilt $\phi_0(\tau)(\rho^a) = \tau \rho^a \tau^{-1} = \rho^{-a}$ und $\phi_0(\tau^b)(\rho^a) = \rho^{(-1)^b a}$. Ebenso gilt $\phi(1+2\mathbb{Z})(a+n\mathbb{Z})$
$= \iota(a+n\mathbb{Z}) = (-a)+n\mathbb{Z}$ und $\phi(b+2\mathbb{Z})(a+n\mathbb{Z}) = \iota^b(a+n\mathbb{Z}) =$

$= (-1)^b a + n\mathbb{Z}$. Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ gilt somit $\psi((\rho^a, \tau^b) * (\rho^c, \tau^d)) =$

$\psi(\rho^a \circ \phi(\tau^b)(\rho^c), \tau^b \circ \tau^d) =$

$\psi(\rho^a \circ \rho^{(-1)^b c}, \tau^{b+d}) = \psi(\rho^{a+(-1)^b c}, \tau^{b+d})$

$= (a + (-1)^b c + n\mathbb{Z}, b + d + 2\mathbb{Z})$. Und ebenso

$\psi(\rho^a, \tau^b) * \psi(\rho^c, \tau^d) =$

$(a + n\mathbb{Z}, b + 2\mathbb{Z}) * (c + n\mathbb{Z}, d + 2\mathbb{Z}) =$

$(a + \phi(b + 2\mathbb{Z})(c + n\mathbb{Z}), b + d + 2\mathbb{Z}) =$

$(a + (-1)^b c + n\mathbb{Z}, b + d + 2\mathbb{Z})$. □