Rückblick

§ 1. Definition der Gruppen, Beispiele

§ 2. Untergruppen und der Satz von Lagrange

§ 3. Elementordnungen und die Struktur zyklischer Gruppen

§ 4. Homomorphismen und Faktorgruppen

Wesentliche Inhalte von § 4

- Existenz und Eindeutigkeit von Homomorphismen
- Automorphismen zyklischer Gruppen: $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$
- Definition der Normalteiler, innere direkte Produkte
- Definition der Faktorgruppen $(gN) * (hN) = (gh)N$
  wichtige Regel: $gN = hN \Leftrightarrow h \in gN$
- Der Homomorphiesatz ermöglicht den Vergleich von Faktorgruppen mit anderen Gruppen, also die Herleitung von Isomorphismen der Form $G/N \cong H$.
- Der Korrespondenzsatz setzt die Untergruppen einer Faktorgruppe G/N in Beziehung zu den Untergruppen U von G mit $U \supseteq N$.

Ziele:

- Jede endlich erzeugte abelsche Gruppe ist ein direktes Produkt zyklischer Gruppen, genauer:
- Jede endliche abelsche Gruppe hat bis auf Isomorphie die Form

$$\mathbb{Z}/p_1^{e_1}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p_r^{e_r}\mathbb{Z}$$

mit $r \in \mathbb{N}_0$, $e_1, \ldots, e_r \in \mathbb{N}$ und Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$.

- Jede endliche erzeugte abelsche Gruppe hat bis auf Isomorphie die Form

$$\mathbb{Z}^s \times \mathbb{Z}/p_1^{e_1}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p_r^{e_r}\mathbb{Z}$$

mit $r, s \in \mathbb{N}_0$, $e_1, \ldots, e_r \in \mathbb{N}$ und Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$.

Definition der Torsionsuntergruppen

Definition (5.2)

Sei G eine abelsche Gruppe und $m \in \mathbb{N}$.

(i) Man nennt $G[m] = \{g \in G \mid mg = 0_G\}$ die m-Torsionsuntergruppe von G.

(ii) Die Teilmenge $\mathrm{Tor}(G) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G[n]$ wird die Torsionsuntergruppe von G genannt.

Definition freier und torsionsfreier Gruppen

Definition (5.3)

Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe.

(i) Wir bezeichnen G als torsionsfrei, wenn $\mathrm{Tor}(G) = \{0_G\}$ gilt.

(ii) Die Gruppe G ist frei, wenn für ein $r \in \mathbb{N}_0$ ein Isomorphismus zwischen G und $(\mathbb{Z}^r, +)$ existiert, wobei $\mathbb{Z}^0 = \{0\}$ gesetzt wird.

Freie und torsionsfreie endliche abelsche Gruppen

Proposition (5.4)

(i) Jede Untergruppe einer freien endlich erzeugten abelschen Gruppe ist eine freie endlich erzeugte abelsche Gruppe.

(ii) Jede torsionsfreie endlich erzeugte abelsche Grupe ist frei.

zu (ii) Sei $(G,+)$ eine torsionsfreie endl. erz. abelsche Gruppe. z.zg:
G ist frei, d.h. $G \cong (\mathbb{Z}^n,+)$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$.
Sei $S \subseteq G$ ein endliches Erz.-system von G. Sei $T = \{g_1,\dots,g_n\} \subseteq S$ eine maximale Teilmenge mit der Eigenschaft, dass
$\mathbb{Z}^n \to G, (a_1,\dots,a_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i g_i$
injektiv ist.

Beh.: Für jedes $g \in S$ gibt es ein $a_g \in \mathbb{N}$ mit $a_g g \in \langle T \rangle$. Sei also $g \in S$

1. Fall: $g \in T$ Dann gilt $1 \cdot g \in \langle T \rangle$, d.h. wir können $a_g = 1$ setzen.

2. Fall: $g \in S \setminus T$ Die Abb. $\mathbb{Z}^{n+1} \to G$,

$(a_1, \ldots, a_{n+1}) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i g_i + a_{n+1} g$ ist nicht injektiv

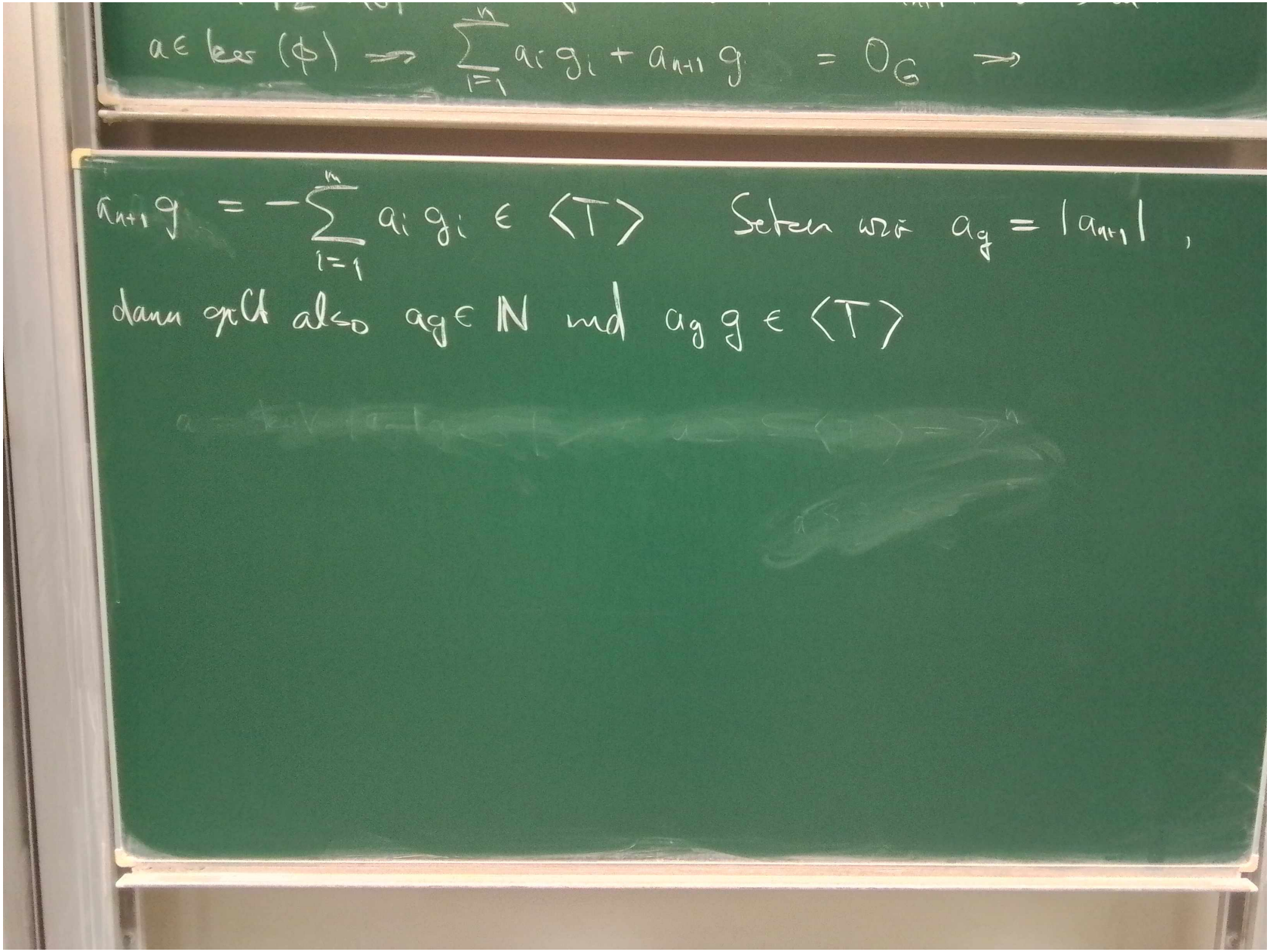
wegen $T \cup \{g\} \supsetneq T$ und aufgrund der Maximalität von T.

Diese Abb. ϕ ist ein Hom., und auf Grund der

Nicht-Inj. gibt ein $a \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\}$ in $\ker(\phi)$.

Da $\phi|_{\mathbb{Z}^n \times \{0\}}$ aber injektiv ist, muss $a_{n+1} \neq 0$ sein.

$a \in \ker(\phi) \to \sum_{i=1}^{n} a_i g_i + a_{n+1} g = 0_G \to$



(Abschluss des Beweises von (ii) auf den nächsten beiden Seiten)

Einige ergänzende Hinweise:

- Dass die Abbildung $\phi : \mathbb{Z}^{n+1} \to G$ ein Homomorphismus ist, kann einfach nachgerechnet werden: Für beliebige $a, b \in \mathbb{Z}^{n+1}$ gilt $\phi(a+b) = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)g_i + (a_{n+1} + b_{n+1})g$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i + a_{n+1} g\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i g_i + b_{n+1} g\right) = \phi(a) + \phi(b).$$

- Ausführung des Arguments Ende vorletzte Tafel:
  Sei $\phi_0 : \mathbb{Z}^n \to G$ definiert durch $\phi_0(b) = \sum_{i=1}^{n} b_i g_i$ für alle $b \in \mathbb{Z}^n$, dann gilt für alle $a \in \mathbb{Z}^{n+1}$ jeweils

$$\phi(a) = \phi_0(a_1, ..., a_n) + a_{n+1} g.$$

  Die Abbildung ϕ_0 ist laut Angabe injektiv. Ist nun $a \in \mathbb{Z}^{n+1}$ mit $\phi(a) = 0$ und $a_{n+1} = 0$, dann folgt $\phi_0(a_1, ..., a_n) = 0$ und somit $(a_1, ..., a_n) = 0$, insgesamt also $a = 0$.

Abschluss des Beweises von Proposition 5.4 (ii)

- Sei $a \in \mathbb{N}$ das kgV der Elemente a_g mit $g \in S$. Wegen $a_g g \in \langle T \rangle$ für alle $g \in S$ gilt dann $aS \subseteq \langle T \rangle$ und somit auch $\langle aS \rangle \subseteq \langle T \rangle$.
- Der Homomorphismus ϕ ist injektiv und offenbar nach Definition von $\langle T \rangle$ auch surjektiv, insgesamt also ein Isomorphismus. Es gilt also $\langle T \rangle \cong \mathbb{Z}^n$, d.h. die Untergruppe $\langle T \rangle$ ist eine freie abelsche Gruppe.
- Durch $g \mapsto ag$ ist somit ein Homomorphismus von $\psi : G \to T$ definiert, und auf Grund der Torsionsfreiheit von G ist dieser injektiv.
- Dies zeigt, dass G isomorph zu einer Untergruppe der endlich erzeugten freien abelsche Gruppe $\langle T \rangle$ ist. Nach Teil (i) ist G damit selbst eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe.

Zerlegung in Torsionsanteil und freien Anteil

Satz (5.5)

Ist G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe, dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}_0$ mit $G \cong \mathbb{Z}^r \times \mathrm{Tor}(G)$. Darüber hinaus ist $\mathrm{Tor}(G)$ eine endliche abelsche Gruppe.

Beweis von Satz 5.5.

1. Schritt: Sei $\bar{G} = G/\mathrm{Tor}(G)$. Dann ist $\bar{G}$ torsionsfrei, d.h. es gilt $\mathrm{Tor}(\bar{G}) = \{0_{\bar{G}}\}$.

Da $\mathrm{Tor}(G)$ eine Untergr. von $\bar{G}$ ist, genügt es „$\subseteq$" zu zeigen. Sei also $\bar{g} \in \mathrm{Tor}(\bar{G})$. z.zg. $\bar{g} = 0_{\bar{G}}$.

$\bar{g} \in \mathrm{Tor}(\bar{G}) \Rightarrow \exists\, m \in \mathbb{N} : m\bar{g} = 0_{\bar{G}}$.

Sei $g \in G$ mit $\bar{g} = g + \mathrm{Tor}(G)$. $\Rightarrow m \cdot (g + \mathrm{Tor}(G))$

$= 0_{\bar{G}} \Rightarrow mg + \mathrm{Tor}(G) = \mathrm{Tor}(G) \Rightarrow mg \in \mathrm{Tor}(G)$

$\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} : n(mg) = 0_G \Rightarrow (mn) \cdot g = 0_G$

$= 0_{\bar{G}} \Rightarrow mg + \mathrm{Tor}(G) = \mathrm{Tor}(G) \Rightarrow mg \in \mathrm{Tor}(G)$

$\Rightarrow g \in \mathrm{Tor}(G) \Rightarrow \bar{g} = g + \mathrm{Tor}(G) = \mathrm{Tor}(G) = 0_{\bar{G}}$

2. Schritt: Darstellung von G als inneres dir. Produkt

Prop. S. 4 (ii) $\Rightarrow \bar{G}$ ist freie endl. erz. abelsche Gruppe, d.h. $\exists r \in \mathbb{N}_0$ und einen Isom. $\bar{G} \cong \mathbb{Z}^r$. Sei $\phi: G \to \mathbb{Z}^r$ die Komposition des kan. Epimorphismus $G \to \bar{G}$, $g \mapsto g + \mathrm{Tor}(G)$ mit diesem Isom. Dann gilt $\ker(\phi) = \mathrm{Tor}(G)$. Für $1 \leq j \leq r$ sei $v_j \in G$ jeweils ein Urbild von $e_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^r$ unter ϕ. Setze $V = \langle v_1, \dots, v_r \rangle \leq G$.

Beh.: G ist inneres direktes Produkt von $\mathrm{Tor}(G)$ und V.

Da G abelsch ist, sind $\mathrm{Tor}(G)$ und V Normalteiler von G.

noch zu überprüfen:

(1) $\mathrm{Tor}(G) \cap V = \{0_G\}$

(2) $\mathrm{Tor}(G) + V = G$

zu (1) gemeint „$\subseteq$" Sei $g \in \mathrm{Tor}(G) \cap V$.

$g \in V \Rightarrow \exists a_1, \dots, a_r \in \mathbb{Z} : g = \sum_{j=1}^{r} a_j v_j$

$g \in \mathrm{Tor}(G) \Rightarrow \exists a \in \mathbb{N} : ag = 0_G$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{r} a a_j v_j = 0_G \overset{\phi \text{ Hom}}{\Longrightarrow} \sum_{j=1}^{r} a a_j \phi(v_j)$

$= \phi(0_G) = 0_{\mathbb{Z}^r} \Rightarrow \sum_{j=1}^{r} a a_j e_j = 0_{\mathbb{Z}^r}$

$\Rightarrow (aa_1, \dots, aa_r) = (0, \dots, 0) \Rightarrow$

$aa_j = 0$ für $1 \le j \le r \overset{a \in \mathbb{N}}{\Longrightarrow} a_j = 0$ für $1 \le j \le r$

$\Rightarrow g = 0_G$

zu (2) „$\supseteq$" Sei $g \in G$. Sei $a = \phi(g) \in \mathbb{Z}^r$.

setze $v = \sum_{j=1}^{r} a_j v_j$. Beh.: $g - v \in \mathrm{Tor}(G)$

Es gilt $\phi(g - v) = \phi(g) - \phi(v) =$

$a - \sum_{j=1}^{r} a_j e_j = a - a = 0_{\mathbb{Z}^r} \Rightarrow g - v \in \ker(\phi)$

$\Rightarrow g - v \in \mathrm{Tor}(G)$ ($\Rightarrow$ Beh.)

Daraus folgt $g = (g - v) + v \in \mathrm{Tor}(G) + V$

3. Schritt: Herleitung des Isomorphismus

Beh. Die Abb. $\psi : \mathbb{Z}^r \to V$, $a \mapsto \sum_{j=1}^{r} a_j v_j$ ist ein Isomorphismus.

Das Hom-Eig überprüft man durch direktes Nachrechnen. Surjektivität: Jedes $g \in V$ hat die Form $\sum_{j=1}^{r} a_j v_j$ für ein $a \in \mathbb{Z}^r$, es gilt also $\Psi(a) = g$ für dieses a. Injektivität: Sei $a \in \mathbb{Z}^r$ mit $\Psi(a) = 0_G \Rightarrow \sum_{j=1}^{r} a_j g_j = 0_G \Rightarrow$

$$\sum_{j=1}^{r} a_j \phi(g_j) = 0_{\mathbb{Z}^r} \Rightarrow a = \sum_{j=1}^{r} a_j e_j = 0_{\mathbb{Z}^r}$$

Da innere direkte Produkte isomorph zu äußeren dir. Produkten sind, gilt insgesamt:

$$G \cong \mathrm{Tor}(G) \times V \cong \mathrm{Tor}(G) \times \mathbb{Z}^r$$

4. Schritt: Nachweis, dass $\mathrm{Tor}(G)$ endlich ist

Mit G ist auch $\mathrm{Tor}(G)$ endlich erzeugt

(Nachweis folgt) Sei $h_1, \dots, h_s$ ein Erz.-system von $\mathrm{Tor}(G)$. Für $1 \le j \le r$ ist $q_j = \mathrm{ord}(h_j)$ jeweils endlich. Lemma 3.2 $\Rightarrow \langle h_j \rangle \overset{(*)}{=} \{ c_j h_j \mid 0 \le c_j < q_j \}$ $(1 \le j \le s)$ Satz 2.9 $\Longrightarrow$

$$\mathrm{Tor}(G) = \left\{ \sum_{j=1}^{s} c_j h_j \mid c_j \in \mathbb{Z},\ 1 \le j \le s \right\}$$

$$\overset{(*)}{=} \left\{ \sum_{j=1}^{s} c_j h_j \mid 0 \le c_j \le q_j - 1,\ 1 \le j \le s \right\}$$

Also ist $\mathrm{Tor}(G)$ endlich. $\square$

Nachtrag zum Anfang von Schritt 4:

Wegen $G \cong \mathrm{Tor}(G) \times \mathbb{Z}^r$ ist auch $\mathrm{Tor}(G) \times \mathbb{Z}^r$ endlich erzeugt. Da $\mathrm{Tor}(G) \times \mathbb{Z}^r \to \mathrm{Tor}(G)$, $(u, v) \mapsto u$ ein surjektiver Hom. ist, ist damit auch $\mathrm{Tor}(G)$ endlich erzeugt.

Die $\mathbb{F}_p$-Vektorraumstruktur auf p-Torsionsgruppen

Lemma (5.6)

(i) Sei G eine abelsche Gruppe, seien $s \in \mathbb{N}_0$, $m_1, ..., m_s \in \mathbb{N}$ und $g_1, ..., g_s \in G$ mit $\text{ord}(g_i) \mid m_i$ für $1 \leq i \leq s$. Sei $U = \langle g_1, ..., g_s \rangle$. Dann gibt es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\phi : \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}/m_s\mathbb{Z} \to U$ mit

$$\phi(\bar{a}_1, ..., \bar{a}_s) = a_1 g_1 + ... + a_s g_s \qquad \text{für alle } a_1, ..., a_s \in \mathbb{Z}.$$

(ii) Ist G eine abelsche Gruppe mit $G[p] = G$, dann gibt es eine Abbildung $\cdot : \mathbb{F}_p \times G \to G$ mit $\bar{a} \cdot g = ag$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ und $g \in G$. Mit dieser Abbildung wird auf G die Struktur eines $\mathbb{F}_p$-Vektorraums definiert.

Beweis von Lemma 5.6:

zu (i) Definiere die Abbildung ϕ durch

$$\phi(a_1 + m_1\mathbb{Z}, \ldots, a_s + m_s\mathbb{Z}) = a_1 g_1 + \cdots + a_s g_s \quad (*)$$

für $0 \le a_j < m_j$, $1 \le j \le s$.

Überprüfe: Die Gleichung $(*)$ ist für beliebige $a_j \in \mathbb{Z}$ erfüllt denn: Division mit Rest liefert $q_j, r_j \in \mathbb{Z}$ mit $a_j = q_j m_j + r_j$ und $0 \le r_j < m_j$. Dann gilt jenach $a_j + m_j\mathbb{Z} = r_j + m_j\mathbb{Z}$, andernfalls: $a_j g_j =$

$(q_j m_j + r_j) g_j = q_j (m_j g_j) + r_j g_j \overset{\text{ord}(g_j) \mid m_j}{=}$

erfüllt denn: Division mit Rest liefert $q_j, r_j \in \mathbb{Z}$ mit $a_j = q_j m_j + r_j$ und $0 \le r_j < m_j$. Dann gilt jeweils

$q_j \, 0_G + r_j g_j = r_j g_j \Rightarrow \phi(a_1 + m_1\mathbb{Z}, \dots, a_s + m_s\mathbb{Z})$

$= \phi(r_1 + m_1\mathbb{Z}, \dots, r_s + m_s\mathbb{Z}) = \sum_{j=1}^{s} r_j g_j = \sum_{j=1}^{s} a_j g_j$

Die Überprüfung der Hom.-eigenschaft ist nun reine Routine, und die Surj. ist wegen $U = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ offensichtlich.

Zu (ii) Die Existenz der Abb. folgt durch Anwendung von (i) auf $s = 1$, $m_1 = p$, $g_1 = g$ für jedes $g \in G$. Für die $\mathbb{F}_p$-Vektorraumstruktur muss überprüft werden

(1) $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot g = \bar{a} \cdot g + \bar{b} \cdot g$ (2) $\bar{a} \cdot (g + h) = \bar{a} \cdot g + \bar{a} \cdot h$

(3) $\bar{1} \cdot g = g$ (4) $(\bar{a}\bar{b}) \cdot g = \bar{a} \cdot (\bar{b} \cdot g)$

für bel. $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{F}_p$ und $g, h \in G$.

jektive Hom. ist, ist damit auch $\mathrm{Tor}(G)$ endlich erzeugt.

Diese Überprüfung ist reine Routine. Überprüfe z.B. (4).

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $\bar{a} = a + p\mathbb{Z}$, $\bar{b} = b + p\mathbb{Z}$. Dann gilt

$$(\bar{a}\bar{b}) \cdot g = ((a+p\mathbb{Z})\cdot(b+p\mathbb{Z}))\cdot g = (ab+p\mathbb{Z})\cdot g =$$

$$(ab)\cdot g = a\cdot(b\cdot g) = (a+p\mathbb{Z})\cdot(b\cdot g) =$$

ab-te additive Potenz von g

$$(a+p\mathbb{Z})\cdot((b+p\mathbb{Z})\cdot g) = \bar{a}\cdot(\bar{b}\cdot g)$$

□

Zerlegung der Torsionsgruppen

Satz (5.7)

Sei G eine abelsche Gruppe.

(i) Sind $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd, dann gilt $G[mn] \cong G[m] \times G[n]$.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $G[n] = G$, und sei $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i}$ die Primfaktorzerlegung von n, mit $r \in \mathbb{N}_0$, Primzahlen $p_1, ..., p_r$ und Exponenten $e_1, ..., e_r \in \mathbb{N}$. Dann besteht ein Isomorphismus $G \cong G[p_1^{e_1}] \times ... \times G[p_r^{e_r}]$.

Beweis von Satz 5.7, Teil (i)

Vsg.: abelsche Gruppe G, $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd

z.zg.: $G[mn] \cong G[m] \times G[n]$

Zeige dafür: $G[mn]$ ist ein inneres direktes Produkt von $G[m]$ und $G[n]$

- Jedes $g \in G[m]$ erfüllt $mg = 0_G$ und somit auch $mng = n(mg) = n \cdot 0_G = 0_G$, liegt also auch in $G[mn]$. $\Rightarrow G[m] \leq G[mn]$, ebenso $G[n] \leq G[mn]$, und da G abelsch ist, sind beide Untergr. auch Normalteiler von $G[mn]$.

- Überprüfe $G[m] \cap G[n] = \{0_G\}$. gemischt

„$\subseteq$" Sei also $g \in G[m] \cap G[n]$, d. h.
$m \cdot g = 0_G$ und $n \cdot g = 0_G$. $ggT(m,n) = 1$
Bézout $\Rightarrow$ $\exists a, b \in \mathbb{Z}$ mit $am + bn = 1$

$\longrightarrow g = 1 \cdot g = (am + bn) \cdot g = a \cdot (mg) + b \cdot (ng)$
$= a \cdot 0_G + b \cdot 0_G = 0_G$.

- Überprüfe: $G[m] + G[n] = G[mn]$

„$\subseteq$" folgt direkt aus $G[m], G[n] \leq G[mn]$.

„$\supseteq$" Sei $g \in G[mn]$. Es gilt $ng \in G[m]$
(wegen $m \cdot (ng) = (mn)g = 0_G$) und ebenso
$ng \in G[n]$. Bézout $\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{Z}$ mit

$am + bn = 1$ (s.o.) $\Rightarrow g = 1 \cdot g = (am + bn) \cdot g$

$= \underbrace{b(ng)}_{\in G[m]} + \underbrace{a \cdot (mg)}_{\in G[n]} = G[m] + G[n]$

Weil $G[mn]$ ein inneres direktes Prod. von $G[m]$ und $G[n]$ ist, gilt $G[mn] \cong G[m] \times G[n]$, nach Proposition 4.24. $\square$

Ausblick: Hauptsatz über endl. erz. abelsche Gruppe

Satz (5.10)

Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann gibt es $r, s \in \mathbb{N}_0$ und $d_1, ..., d_s \in \mathbb{N}$ mit

$$G \quad \cong \quad \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z}.$$

Dabei können die Zahlen d_i so gewählt werden, dass sie entweder

(i) alle Primzahlpotenzen sind oder

(ii) $d_i \mid d_{i+1}$ für $1 \leq i < s$ erfüllt ist.

Im Fall (ii) gezeichnet man die Zahlen d_i als Elementarteiler der abelschen Gruppe.