Eine Verknüpfung auf den Linksnebenklassen

Proposition (4.26)

Sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler von G. Dann gibt es auf der Menge G/N eine eindeutig bestimmte Verknüpfung $\cdot$ mit der Eigenschaft

$$(gN) \cdot (hN) \quad = \quad (gh)N \qquad \text{für alle} \quad g, h \in G.$$

Satz (4.27)

Sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler. Dann ist die Menge G/N der Linksnebenklassen mit der Verknüpfung $gN \cdot hN = (gh)N$ eine Gruppe, die sogenannte Faktorgruppe von G modulo N. Die Abbildung $\pi_N : G \to G/N$, $g \mapsto gN$ ist ein Epimorphismus von Gruppen, der sog. kanonische Epimorphismus.

wichtiges Beispiel: die Faktorgruppen $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

Der induzierte Homomorphismus

Proposition (4.28)

Sei $\phi : G \to H$ ein Gruppen-Homomorphismus und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler mit $N \subseteq \ker(\phi)$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\bar{\phi} : G/N \to H$ mit

$$\bar{\phi}(gN) \quad = \quad \phi(g) \qquad \text{für alle } g \in G.$$

Man nennt $\bar{\phi}$ den durch ϕ induzierten Homomorphismus.

Der Homomorphiesatz für Gruppen

Satz (4.29)

Sei $\phi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann induziert ϕ einen Isomorphismus

$$\bar{\phi} : G/\ker(\phi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(\phi).$$

Ist der Homomorphismus ϕ surjektiv, dann erhält man also einen Isomorphismus $G/\ker(\phi) \cong H$.

Beweis von Satz 4.29:

geg.: Gruppenhomomorphismus $\phi : G \to H$

Sei $N = \ker(\phi)$. z.z.: $G/N \cong \mathrm{im}(\phi)$

Prop 4.28 $\Rightarrow \exists$ Hom. $\bar{\phi} : G/N \to H$ mit der Eigenschaft $\bar{\phi}(gN) = \phi(g) \; \forall g \in G$.

überprüfe: (1) $\mathrm{im}(\bar{\phi}) = \mathrm{im}(\phi)$

(2) $\bar{\phi}$ ist injektiv

Daraus folgt unmittelbar $G/N \cong \mathrm{im}(\phi)$, denn jeder injektive Homomorphismus ist ein Isomorphismus auf sein Bild.

zu (1) „$\subseteq$" Sei $h \in \mathrm{im}(\bar{\phi}) \Rightarrow \exists g \in G : \bar{\phi}(gN) = h \Rightarrow \phi(g) = h \Rightarrow h \in \mathrm{im}(\phi)$.

„⊇" Sei $h \in \mathrm{im}(\phi) \Rightarrow \exists g \in G : \phi(g) = h \Rightarrow$
$\bar{\phi}(gN) = h \Rightarrow h \in \mathrm{im}(\bar{\phi})$.

zu (⊇) Da $\bar{\phi}$ ein Homomorphismus ist, genügt es zu interpretieren, dass $\ker(\bar{\phi}) \subseteq \{e_{G/N}\} = \{N\}$ gilt.
Sei $gN \in \ker(\bar{\phi})$, mit $g \in G$. $\Rightarrow \bar{\phi}(gN) = e_H$
$\Rightarrow \phi(g) = e_H \Rightarrow g \in \ker(\phi) \Rightarrow g \in N \Rightarrow$
$gN = N \Rightarrow gN \in \{N\}$. □

weiteres Anwendungsbeispiel für den Homomorphiesatz:

Für jeden Körper K und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$GL_n(K) / SL_n(K) \cong K^\times$$

Wende den Hom.-satz an auf $G = GL_n(K)$, $H = K^\times$ und die Abbildung $\phi : G \to H$, $A \mapsto \det(A)$.

(Für jedes $A \in GL_n(K)$ gilt $\det(A) \neq 0$, also tatsächlich $\phi(A) \in K^\times \; \forall A \in GL_n(K)$)

zu überprüfen: (1) ϕ ist ein Gruppenhom.

(2) ϕ ist surjektiv

(3) $\ker(\phi) = SL_n(K)$

Wende den Hom.-satz an auf $G = GL_n(K)$, $H = K^\times$

zu (1) Die Determinantenfkt. ist bekanntlich multiplikativ.
Daraus folgt $\phi(AB) = \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = \phi(A) \cdot \phi(B)$
für alle $A, B \in GL_n(K)$.

zu (2) Sei $a \in K^\times$ z.Zg: $\exists A \in GL_n(K)$ mit $\phi(A) = a$
bzw. $\det(A) = a$ Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}$ Dann gilt
$\det(A) = 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot a = a \neq 0$, also $A \in GL_n(K)$ und $\phi(A) = a$.

zu (3) Sei $A \in GL_n(K)$. Dann gilt die Äquivalenz

$A \in \ker(\phi) \iff \phi(A) = 1$ (= Neutralelement von $K^\times$)

$\iff \det(A) = 1 \iff A \in SL_n(K)$ □

Korespondenzsatz (Vorb.)

Proposition (4.30)

Sei G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler und $\pi_N : G \to G/N$ der kanonische Epimorphismus.

(i) Ist U eine Untergruppe von G, dann gilt $\pi_N^{-1}(\pi_N(U)) = UN$.

(ii) Ist $\bar{U}$ eine Untergrupe von G/N, dann gilt $\pi_N(\pi_N^{-1}(\bar{U})) = \bar{U}$.

Beweis von Proposition 4.30:

zu (i) Vor.: $U \leq G$ zzg. $\pi_N^{-1}(\pi_N(U)) = UN$

„$\subseteq$" Sei $g \in \pi_N^{-1}(\pi_N(U)) \Rightarrow \pi_N(g) \in \pi_N(U)$

$\Rightarrow \exists u \in U : \pi_N(g) = \pi_N(u) \Rightarrow gN = uN$

$\Rightarrow g \in uN \Rightarrow \exists n \in N : g = un \Rightarrow g \in UN$

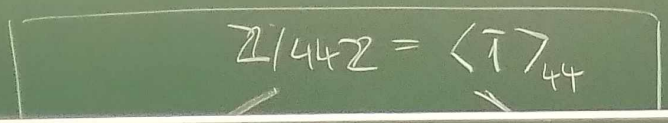
„$\supseteq$" Sei $g \in UN \Rightarrow \exists u \in U, n \in N : g = un$

zzg: $g \in \pi_N^{-1}(\pi_N(U))$ gleichbedeutend: $\pi_N(g) \in \pi_N(U)$

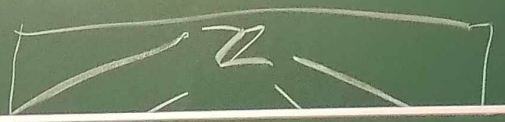
d.h. $gN \in \pi_N(U)$ bzw. $unN \in \pi_N(U)$

Wegen $uN \in \pi_N(U)$ genügt es zu überprüfen, dass $unN = uN$ gilt. Dies ist erfüllt wegen $un \in uN$.

Untergruppenstruktur von $(\mathbb{Z}/442, +)$:



Untergruppenstr. von $(\mathbb{Z}, +)$



zu (ii) geg. $\bar{U} \leq G/N$ z.zg.: $\pi_N(\pi_N^{-1}(\bar{U})) \subseteq \bar{U}$

„$\subseteq$" ist erfüllt, da für jedes $\bar{g} \in \pi_N^{-1}(\bar{U})$ jeweils $\pi_N(\bar{g}) \in \bar{U}$ gilt, nach Def. der Urbildmenge $\pi_N^{-1}(\bar{U})$.

„$\supseteq$" Sei $\bar{g} \in \bar{U}$ und $g \in G$ mit $\bar{g} = gN$.

z.zg.: $\bar{g} \in \pi_N(\pi_N^{-1}(\bar{U}))$ gleichbedeutend: Es gibt ein $g' \in \pi_N^{-1}(\bar{U})$ mit $\pi_N(g') = \bar{g}$. Offenbar wird das durch $g' = g$ erfüllt, wegen $\pi_N(g) = \bar{g} \in U$ ($\Rightarrow g \in \pi_N^{-1}(\bar{U})$) und $\pi_N(g) = gN = \bar{g}$.

□

Der Korrespondenzsatz für Gruppen

Satz (4.31)

Sei G eine Gruppe, N ein Normalteiler, $\bar{G} = G/N$ und $\pi_N : G \to \bar{G}$ der kanonische Epimorphismus. Ferner sei $\bar{\mathcal{G}}$ die Menge der Untergruppen von $\bar{G}$ und $\mathcal{G}_N$ die Menge der Untergruppen U von G mit $U \supseteq N$. Dann sind die beiden Abbildungen

$$\mathcal{G}_N \to \bar{\mathcal{G}},\ U \mapsto \pi_N(U) \quad \text{und} \quad \bar{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}_N,\ \bar{U} \mapsto \pi_N^{-1}(\bar{U})$$

bijektiv und zueinander invers. Außerdem gilt:

(i) Für $U, V \in \mathcal{G}_N$ gilt $U \subseteq V$ genau dann, wenn $\pi_N(U) \subseteq \pi_N(V)$ erfüllt ist. (Isotonie)

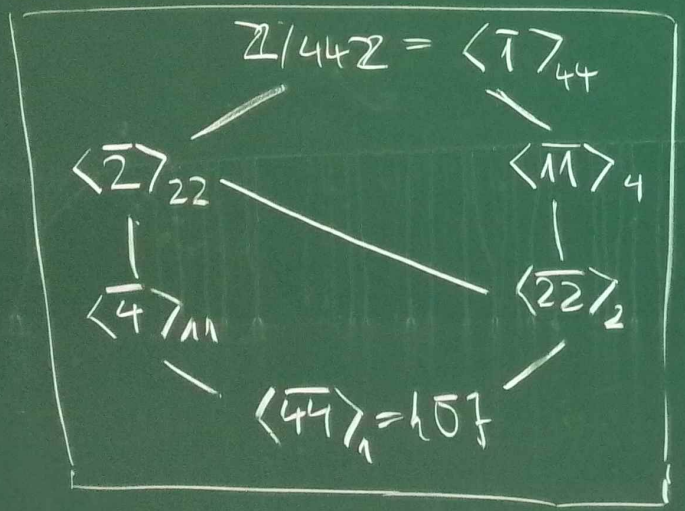
(ii) Genau dann ist $U \in \mathcal{G}_N$ ein Normalteiler von G, wenn $\pi_N(U)$ ein Normalteiler von $\bar{G}$ ist.

(iii) Ist $U \in \mathcal{G}_N$ von endlichem Index in G und $\bar{U} = \pi_N(U)$, dann gilt $(G : U) = (\bar{G} : \bar{U})$.

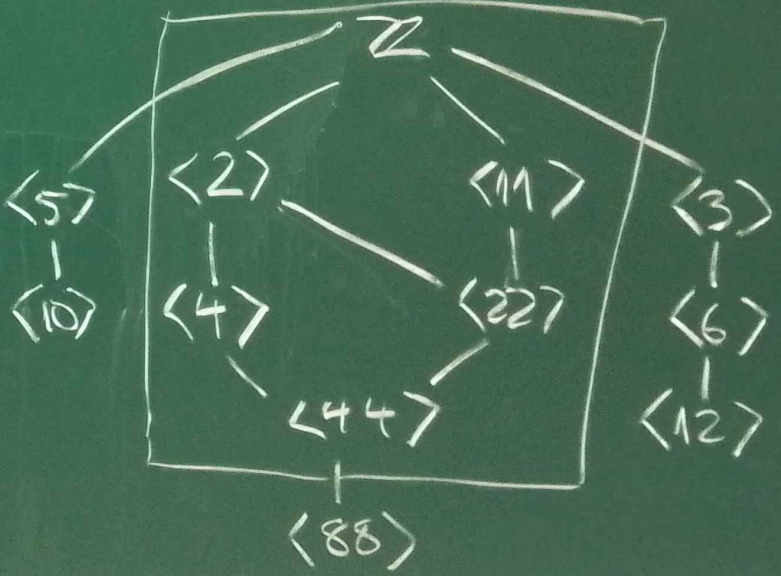
Beispiel für die Anwendung des Korrespondenzsatzes

$G = (\mathbb{Z}, +)$, $N = \langle 44 \rangle = 44\mathbb{Z}$, $G/N = \mathbb{Z}/44\mathbb{Z}$

Untergruppenstruktur von $(\mathbb{Z}/44\mathbb{Z}, +)$:



Untergruppenstr. von $(\mathbb{Z}, +)$



Beweis von Satz 4.31

z.zg: Die beiden Abbildungen $\mathcal{G}_N \to \bar{\mathcal{G}}$, $\bar{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}_N$ sind zueinander invers.

- Sei $U \in \mathcal{G}_N$. z.zg: $\pi_N^{-1}(\pi_N(U)) = U$

  Es gilt $\pi_N^{-1}(\pi_N(U)) = UN = U$

  $\uparrow$ 4.30 (i) $\quad$ $\uparrow$ wegen $N \subseteq U$, da $U \in \mathcal{G}_N$

- Sei $\bar{U} \in \bar{\mathcal{G}}$ z.zg: $\pi_N(\pi_N^{-1}(\bar{U})) = \bar{U}$

  Dies folgt direkt aus Prop. 4.30 (ii)

Da die Abbildungen zueinander invers sind, sind beide bijektiv.

zu (i) Seien $U, V \in \mathcal{G}_N$. z.zg: $U \subseteq V \iff \pi_N(U) \subseteq \pi_N(V)$

zu (i) Seien $U, V \in \mathcal{G}_N$. zzg: $U \leq V \iff \pi_N(U) \leq \pi_N(V)$

„$\Rightarrow$" offensichtlich „$\Leftarrow$" Aus $\pi_N(U) \leq \pi_N(V)$ folgt $\pi_N^{-1}(\pi_N(U)) \leq \pi_N^{-1}(\pi_N(V))$, und dies ist gleichbedeutend mit $U \leq V$

zu (ii) Sei $U \in \mathcal{G}_N$. zzg.: $U \trianglelefteq G \iff \pi_N(U) \trianglelefteq \bar{G}$

„$\Rightarrow$" gilt, weil Bilder von Normalteilern unter surjektiven Gruppenhom. (wie z.B. π_N) selbst Normalteiler sind

„$\Leftarrow$" gilt, weil Urbilder von Normalteilern unter Gruppenhom. selbst Normalteiler sind

zu (iii) Sei $U \in \mathcal{G}_N$ mit $(G:U) \in \mathbb{N}$ und $\bar{U} = \pi_N(U)$

zzg: $(\bar{G}:\bar{U}) = (G:U)$

Beh. Durch $\bar{g}\bar{U} \mapsto \pi_N^{-1}(\bar{g}\bar{U})$ ist eine Bijektion zwischen

$\bar{G}/\bar{U}$ und G/U geg. (Daraus folgt, dass die Mengen gleichmächtig sind und somit tatsächlich $(\bar{G}:\bar{U}) = (G:U)$ gilt.)

- Sei $\bar{g} \in G/N$ und $g \in G$ mit $gN = \pi_N(g) = \bar{g}$.

  Beh.: $\pi_N^{-1}(\bar{g}\bar{U}) = gU$ (Daraus folgt, dass $\bar{g}\bar{U} \mapsto \pi_N^{-1}(\bar{g}\bar{U})$ tatsächlich eine Abb. zwischen $\bar{G}/\bar{U}$ und G/U ist.)

  $\overset{hN}{\parallel}$

  „$\subseteq$" Sei $h \in \pi_N^{-1}(\bar{g}\bar{U}) \Rightarrow \pi_N(h) \in \bar{g}\bar{U} \leq \bar{G}$.

  $\exists\, \bar{u} \in \pi_N(U)$ mit $\pi_N(h) = \bar{g}\bar{u}$ Sei $u \in U$ mit $\pi_N(u) = \bar{u}$ $\pi_N(h) = \bar{g}\bar{u} \Rightarrow hN = (gN)(uN) = (gu)N \Rightarrow h \in gunN \Rightarrow \exists n \in N : h = gun$

  $\Longrightarrow un \in U$ wg. $N \leq U$ $h \in gU$

„⊇" Sei $h \in gU \Rightarrow \exists u \in U$ mit $h = gu$

z.zg.: $h \in \pi_N^{-1}(\bar{g}\bar{U})$ gleichbed.: $\pi_N(h) \in \bar{g}\bar{U}$

Dies ist offensichtlich, da $\pi_N(h) = \pi_N(g)\,\pi_N(u)$
$= \bar{g} \cdot \pi_N(u)$ und $\pi_N(u) \in \bar{U}$ gilt. ($\Rightarrow$ Beh.)

- Injektivität der Abbildung:

Seien $\bar{g}, \bar{g}' \in G/N$ mit $\pi_N^{-1}(\bar{g}\bar{U}) \overset{(*)}{=} \pi_N^{-1}(\bar{g}'\bar{U})$

z.zg.: $\bar{g}\bar{U} = \bar{g}'\bar{U}$ Seien $g, g' \in G$ mit

$\pi_N(g) = \bar{g}$, $\pi_N(g') = \bar{g}'$ Dann gilt also $gU = g'U$

wegen (*). $\Rightarrow g' \in gU \Rightarrow \exists u \in U: g' = gu$

$\Rightarrow \bar{g}' = \bar{g}\,\pi_N(u) \Rightarrow \bar{g}' \in \bar{g}\bar{U} \rightarrow \bar{g}'\bar{U} = \bar{g}\bar{U}$

- Surjektivität: Sei $gU \in G/U$, mit $g \in G$. Setze $\bar{g} = \pi_N(g) = gN$.

Dann gilt (s.o.) $\pi_N^{-1}(\bar{g}\bar{U}) = gU$ $\square$

Die Isomorphiesätze

Satz (4.32)

Sei G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$ und U eine Untergruppe von G.

(i) Dann ist $N \cap U$ ein Normalteiler von U, und es gilt $U/(N \cap U) \cong (UN)/N$.

(ii) Ist auch $U \trianglelefteq G$ und gilt $U \supseteq N$, dann folgt $G/U \cong (G/N)/(U/N)$.

Beweis von Satz 4.32

zu (i) geg.: $N \trianglelefteq G$, $U \leq G$

Wegen $N \trianglelefteq G$ gilt auch $N \trianglelefteq UN$.

denn: Sei $g \in UN$ und $n \in N$. z.zg.: $gng^{-1} \in N$

Dies ist erfüllt, da $g \in G$, $n \in N$, und $N \trianglelefteq G$ gilt.

z.zg.: $U/(N \cap U) \cong (UN)/N$

Wir wenden den Homomorphiesatz an auf die Abbildung $\phi: U \to (UN)/N$, $u \mapsto uN$

zu überprüfen: (1) ϕ ist ein Homomorphismus.

(2) ϕ ist surjektiv (3) $\ker(\phi) = U \cap N$.

Sind (1), (2), (3) erfüllt, dann liefert der Homomorphiesatz den angeg. Isomorphismus.

zu (1) Seien $u, v \in U$. Dann gilt $\phi(uv) = (uv)N$
$= (uN)(vN) = \phi(u)\,\phi(v)$.

zu (2) Sei $gN \in (UN)/N$, mit $g \in UN$.

$g \in UN \Rightarrow \exists u \in U, n \in N$ mit $g = un$.

überprüfe: $\phi(u) = gN$ Tatsächlich gilt $unN = uN$
wegen $un \in uN$, und somit $\phi(u) = uN = unN = gN$.

zu (3) Sei $u \in U$. z.zg: $u \in \ker(\phi) \Leftrightarrow u \in U \cap N$

Tatsächlich gilt: $u \in \ker(\phi) \Leftrightarrow \phi(u) \in e_{UN/N} \Leftrightarrow$
$\phi(u) = N \Leftrightarrow uN = N \Leftrightarrow u \in N \Rightarrow u \in U \cap N$
$\uparrow u \in U$

□