Rückblick

§ 1. Definition der Gruppen, Beispiele

§ 2. Untergruppen und der Satz von Lagrange

§ 3. Elementordnungen und die Struktur zyklischer Gruppen

Besonderheit der endlichen zyklischen Gruppen:

Für jeden Teiler d der Gruppenordnung $|G|$ gibt es in G genau eine Untergruppe der Ordnung d.

Rückblick § 4. Homomorphismen und Faktorgruppen

- Eindeutigkeit und Existenz von Gruppenhomomorphismen
  (Existenz nur für Homomorphismen auf zyklischen Gruppen)
- Definition der Normalteiler
  $(N \trianglelefteq G \Leftrightarrow \forall\, g \in G : gN = Ng)$
- Regeln für Komplexprodukte von Untergruppen
  $NU = \{nu \mid n \in N, u \in U\}$
- innere direkte Produkte
  G inneres direktes Produkt von N und $U \Rightarrow G \cong N \times U$

Wiederholung: Induzierte Abbildungen

Satz (4.25)

Seien X und Y Mengen und $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf X.

(i) Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass für alle $x, x' \in X$ aus $x \equiv x'$ jeweils $f(x) = f(x')$ gilt, dann existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung $\bar{f} : X/\equiv \to Y$ mit $\bar{f}([x]) = f(x)$ für alle $x \in X$.

(ii) Ist $g : X \times X \to Y$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass für alls $x, x' \in X$ und $y, y' \in X$ aus $x \equiv x'$ und $y \equiv y'$ jeweils $g(x, y) = g(x', y')$ folgt, dann existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung $\bar{g} : (X/\equiv) \times (X/\equiv) \to Y$ mit $\bar{g}([x], [y]) = g(x, y)$ für alle $x, y \in X$.

Man nennt $\bar{f}$ bzw. $\bar{g}$ die durch f bzw. g induzierte Abbildung.

Beweis von Satz 4.25, Teil (ii)

Sei $R \subseteq X$ ein Repräsentantensystem von $X/\equiv$.

Definition von $\bar{g} : (X/\equiv) \times (X/\equiv) \to Y$:

Sind $A, B \in X/\equiv$ vorgegeben und $x_0, x_1 \in R$ die (eindeutig bestimmten) Repräsentanten von A bzw. B, dann setzen wir $\bar{g}(A, B) = g(x_0, x_1)$.

Seien nun $x, y \in X$ bel. vorgeg. zu überprüfen:

$$\bar{g}([x], [y]) = g(x, y)$$

Seien nun $x, y \in X$ bel. Wegen ...

$\bar{g}([x],[y]) = g(x,y)$

Sei $x' \in R$ der Repräsentant von $[x]$, und $y' \in R$ der Repräsentant von $[y]$. Dann gilt nach Def. $\bar{g}([x],[y]) = g(x',y')$. z.zg. bleibt also: $g(x',y') = g(x,y)$

$$\left.\begin{array}{l} x' \in [x] \Rightarrow x' \equiv x \\ y' \in [y] \Rightarrow y' \equiv y \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{an } g]{\text{Voraussetzung}} g(x',y') = g(x,y)$$

$\square$

Eine Verknüpfung auf den Linksnebenklassen

Proposition (4.26)

Sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler von G. Dann gibt es auf der Menge G/N eine eindeutig bestimmte Verknüpfung $\cdot$ mit der Eigenschaft

$$(gN) \cdot (hN) \quad = \quad (gh)N \qquad \text{für alle} \quad g, h \in G.$$

Satz (4.27)

Sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler. Dann ist die Menge G/N der Linksnebenklassen mit der Verknüpfung $gN \cdot hN = (gh)N$ eine Gruppe, die sogenannte Faktorgruppe von G modulo N. Die Abbildung $\pi_N : G \to G/N$, $g \mapsto gN$ ist ein Epimorphismus von Gruppen, der sog. kanonische Epimorphismus.

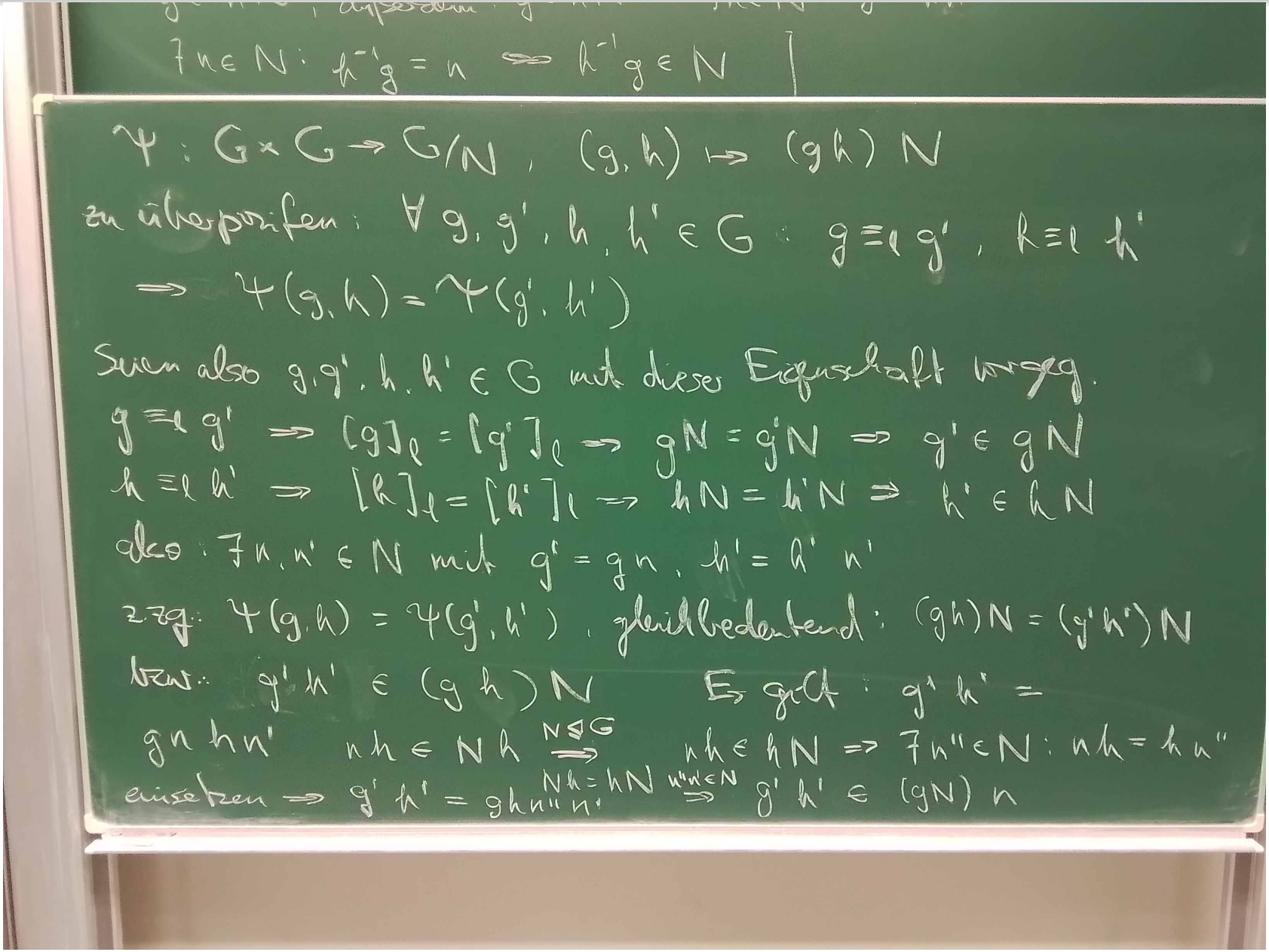
wichtiges Beispiel: die Faktorgruppen $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

Beweis von Proposition 4.26

Erinnerung: Für jedes $g \in G$ stimmt die Linksnebenklasse gN überein mit der Äquivalenzkl. $[g]_\ell$ von g bzgl. der Äquivalenzrelation $\equiv_\ell$ gegeben durch

$$g \equiv_\ell h \iff h^{-1}g \in N \quad \left[gN = hN \iff h \in gN \iff g \in hN, \text{ außerdem: } g \in hN \iff \exists n \in N : g = hn \iff \exists n \in N : h^{-1}g = n \iff h^{-1}g \in N \right]$$

Die gewünschte Verknüpfung erhält man nun direkt durch Anwendung von Satz 4.25 (ii) auf die Abbildung



Korrektur:

Am Ende der letzten Zeile muss es $g'h' \in (gh)N$ heißen.

Die Anwendung des Satzes liefert eine AGR.

$\bar{\varphi} : G/N \times G/N \to G/N$ mit $\bar{\varphi}([g]_l, [h]_l) = \varphi(g,h)$ für alle $g,h \in G$. Setzen wir also $A \circ B = \bar{\varphi}(A,B)$ für alle $A,B \in G/N$, dann gilt für alle $g,h \in G$ jeweils $(gN)\circ(hN) = \bar{\varphi}([g]_l,[h]_l) = \varphi(g,h) = (gh)N$.

□

Beweis von Satz 4.27.

Überprüfe für $(G/N, \circ)$ die Gruppeneigenschaften im Einzelnen:

(1) $\circ$ ist assoziativ

(2) N ist Neutralelement der Halbgruppe $(G/N, \circ)$

(3) Jedes Element im Monoid $(G/N, \circ)$ ist invertierbar. Es gilt $(gN)^{-1} = g^{-1}N$ für alle $g \in G$.

Zu (1) Seien $A, B, C \in G/N$. z.zg.:

$$(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$$

$A, B, C \in G/N \Rightarrow \exists g, h, k \in G$ mit $A = gN$, $B = hN$, $C = kN$.

Es gilt $(A \cdot B) \cdot C = (gN \cdot hN) \cdot kN$

$= (gh)N \cdot kN = ((gh)k)N =$

$(g(hk))N = gN \cdot (hk)N = gN \cdot (hN \cdot kN)$

$= A \cdot (B \cdot C)$

zu (2) Sei $gN \in G/N$, mit $g \in G$. z.zg:

$gN \cdot N = N$ und $N \cdot gN = N$

$N \leq G \Rightarrow e \in N \Rightarrow eN = N$

$\Rightarrow gN \cdot N = gN \cdot eN = (ge)N = gN$.

ebenso $N \cdot gN = eN \cdot gN = (eg)N = gN$

also: $(G/N, \cdot)$ ist ein Monoid, mit $e_{G/N} = N$

zu (3) Sei $gN \in G/N$, mit $g \in G$.

Beh.: $g^{-1}N$ ist Inverses von gN im Monoid $(G/N, \cdot)$ (und gN somit invertierbar)

Es gilt $gN \cdot g^{-1}N = (gg^{-1})N = eN = N = e_{G/N}$

und $g^{-1}N \cdot gN = (g^{-1}g)N = eN = N = e_{G/N}$

$(\Rightarrow$ Beh.) $\square$

Es fehlt noch der Nachweis, dass $\pi_N : G \to G/N$, $g \mapsto gN$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist.

- Surjektivität:

  Sei $A \in G/N$ vorgegeben. Nach Definition der Menge G/N der Linksnebenklassen gilt $A = gN$ für ein $g \in G$. Es gilt also $\pi_N(g) = gN = A$.

- Homomorphismus-Eigenschaft:

  Seien $g, h \in G$. Dann gilt
  $\pi_N(gh) = (gh)N = (gN) \cdot (hN) = \pi_N(g) \cdot \pi_N(h)$.

Anwendungsbeispiel:

Betrachte $G = (S_3, \circ)$ und $N = \langle (123) \rangle = \{ id, (123), (132) \}$. Es gilt $N \trianglelefteq G$ wegen

$$(G:N) = \frac{|G|}{|N|} = \frac{|S_3|}{|N|} = \frac{6}{3} = 2$$

Bestimme für die Faktorgruppe G/N eine Verknüpfungstabelle. Es gilt $G/N = \{\bar{e}, \bar{g}\}$ mit $\bar{e} = N$ und $\bar{g} = gN$, wobei $g = (12)$ ($|G/N| = (G:N) = 2$ und $\bar{g} \neq \bar{e}$, da ansonsten $gN = N$, also $g = (12) \in N$ ↯. $\Rightarrow \bar{e}, \bar{g}$ sind tatsächlich die beiden Elemente von G/N)

... $G/N = \{e, g\}$ mit $e = N$

und $\bar{g} = gN$, wobei $g = (12)$ ($|G/N| = (G:N) = 2$)

$\cdot$	$\bar{e}$	$\bar{g}$
$\bar{e}$	$\bar{e}$	$\bar{g}$
$\bar{g}$	$\bar{g}$	$\bar{e}$

$\bar{e} \cdot \bar{e} = N \cdot N = (eN) \cdot (eN) = (e \cdot e)N = eN = N = N \cdot \bar{e}$

$\bar{e} \cdot \bar{g} = (eN) \cdot (gN) = (eg)N = gN = \bar{g}$

$\bar{g} \cdot \bar{e} = (gN) \cdot (eN) = (ge)N = gN = \bar{g}$

$\bar{g} \cdot \bar{g} = (gN) \cdot (gN) = (g \cdot g)N = ((12) \cdot (12))N = \mathrm{id}\, N \overset{e = \mathrm{id}}{=} eN = \bar{e}$

Bem: Jedes Repräsentantensystem der Linksnebenklassen kann zur Bestimmung der Verknüpfungstabelle verwendet werden.

$N = \{\underbrace{\mathrm{id}}_{=e}, (123), (132)\}$, $(12)N = \{(12) \cdot \mathrm{id}, (12) \cdot (123), (12) \cdot (132)\}$

$= \{(12), (23), (13)\}$ $\Rightarrow$ Auch $\{(123), (13)\}$ ist ein Repräsentantensystem von G/N $\Rightarrow$ Es gilt auch $G/N = \{(123)N, (13)N\}$

Wir berechnen die Verknüpfungstabelle noch einmal auf Basis dieser Elementdarstellung

	$(123)N$	$(13)N$
$(123)N$	$(123)N$	$(13)N$
$(13)N$	$(13)N$	$(123)N$

$(123)N \cdot (123)N = ((123)\circ(123))N = (132)N$

$= (123)N$

$\uparrow (132) \in (123)N$

$(123)N \cdot (13)N = ((123)\circ(13))N = (23)N$

$= (13)N$

$\uparrow (23) \in (13)N$

$(13)N \cdot (123)N = \big((13) \circ (123)\big)N = (12)N$

$= (13)N$

$\uparrow (12) \in (13)N$

$(13)N \cdot (13)N = \big((13) \circ (13)\big)N = \mathrm{id}\, N$

$= (123)N$

$\uparrow \mathrm{id} \in (123)N$

alternative Verknüpfungstabelle für $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$, basierend auf dem Repräsentantensystem $\{8, -3, 6, 7\}$

$8 \to 0+4\mathbb{Z}$, $-3 \to 1+4\mathbb{Z}$, $6 \to 2+4\mathbb{Z}$, $7 \to 3+4\mathbb{Z}$

+	$\overline{8}$	$\overline{-3}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{-3}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{-3}$	$\overline{-3}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{-3}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{-3}$	$\overline{6}$

Der induzierte Homomorphismus

Proposition (4.28)

Sei $\phi : G \to H$ ein Gruppen-Homomorphismus und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler mit $N \subseteq \ker(\phi)$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\bar{\phi} : G/N \to H$ mit

$$\bar{\phi}(gN) \quad = \quad \phi(g) \qquad \text{für alle } g \in G.$$

Man nennt $\bar{\phi}$ den durch ϕ induzierten Homomorphismus.

(2) Für alle $n \geq 2$ gilt $S_n / A_n \cong (\{\pm 1\}, \cdot)$,

denn die Abbildung $\phi : S_n \to \{\pm 1\}, \sigma \mapsto \operatorname{sgn}(\sigma)$

Beweis von Proposition 4.28:

Damit Satz 4.25 (i) eine Abb. $\bar{\Phi} : G/N \to H$ mit $\bar{\Phi}(gN) = \phi(g)$ für alle $g \in G$ liefert, müssen wir zeigen, dass der Hom. $\phi : G \to H$ mit $N \subseteq \ker(\phi)$ auf den Äquivalenzklassen von $\equiv_l$ konstant ist. Seien also $g, g' \in G$ mit $g \equiv_l g'$.

z.zg.: $\phi(g) = \phi(g')$ $\quad g \equiv_l g' \Rightarrow (g')^{-1} g \in N \overset{\text{Vor.}}{\Rightarrow}$

$(g')^{-1} g \in \ker(\phi) \to \phi(g') = \phi(g') \cdot e_H = \phi(g') \cdot \phi((g')^{-1} \cdot g)$

$= \phi(g' (g')^{-1} g) = \phi(e_G \, g) = \phi(g)$. Nach Satz 4.25 (i) existiert also eine Abb. $\bar{\Phi} : G/N \to H$ mit $\bar{\Phi}(gN) = \bar{\phi}([g]_l)$

$= \phi(g)$ für alle $g \in G$. Diese ist ein Gruppenhom., denn für

...mal

alle $g, g' \in G$ gilt $\overline{\Phi}((gN)\cdot(g'N)) =$
$\overline{\Phi}((gg')N) = \phi(gg') = \phi(g)\cdot\phi(g')$
$= \overline{\Phi}(gN)\cdot\overline{\Phi}(g'N)$. □

Der Homomorphiesatz für Gruppen

Satz (4.29)

Sei $\phi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann induziert ϕ einen Isomorphismus

$$\bar{\phi} : G/\ker(\phi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(\phi).$$

Ist der Homomorphismus ϕ surjektiv, dann erhält man also einen Isomorphismus $G/\ker(\phi) \cong H$.

Anwendungsbeispiele für den Homomorphiesatz:

(1) Man kann mit dem Hom.-satz zeigen, dass für jede Gruppe G jeweils $G/\{e_G\} \cong G$ und $G/G \cong \{e_G\}$ isomorph ist (durch Anwendung des Satzes auf die Homomorphismen $\phi: G \to G,\ g \mapsto g$ bzw. $\phi: G \to \{e_G\},\ g \mapsto e_G$).

(2) Für alle $n \geq 2$ gilt $S_n / A_n \cong (\{\pm 1\}, \cdot)$, denn die Abbildung $\phi: S_n \to \{\pm 1\},\ \sigma \mapsto \operatorname{sgn}(\sigma)$ ist ein surjektiver Hom. (z.B. $\phi(\mathrm{id}) = 1$, $\phi((12)) = -1$) und es gilt $\ker(\phi) = \{\sigma \mid \phi(\sigma) = 1\} = A_n$.