Definition der Normalteiler

Definition (4.16)

Sei G eine Gruppe. Eine Untergruppe U von G wird Normalteiler von G genannt, wenn $gU = Ug$ für alle $g \in G$ gilt.

Notation: Sei G eine Gruppe.

- $U \leq G$ bedeutet: U ist Untergruppe von G
- $N \trianglelefteq G$ bedeutet: N ist Normalteiler von G

Definition der Komplexprodukte

Definition (4.19)

Sei G eine Gruppe, und seien $A, B \subseteq G$ beliebige Teilmengen. Dann nennt man die Teilmenge $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ das Komplexprodukt von A und B.

Bei Gruppen in additiver Schreibweise verwendet man für das Komplexprodukt die Schreibweise $A + B$ statt AB.

Definition des Normalisators

Definition (4.21)

Sei G eine Gruppe und $U \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann nennt man $N_G(U) = \{g \in G \mid gUg^{-1} = U\}$ den Normalisator von U in G.

Die Bedeutung des Normalisators wird durch die folgende Proposition deutlich.

Proposition (4.22)

Sei G eine Gruppe und U eine Untergruppe. Dann ist $N_G(U)$ die größte Untergruppe H von G mit der Eigenschaft, dass U Normalteiler von H ist.

Beweis von Proposition 4.22

geg: G Gruppe, $U \leq G$

bereits bekannt aus den Übungen: $N_G(U) \leq G$

z.zg.: (1) $U \trianglelefteq N_G(U)$

(2) $V \leq G$ mit $U \trianglelefteq V \Rightarrow V \subseteq N_G(U)$

zu (1) Sei $u \in U$, $h \in N_G(U)$ z.zg.: $huh^{-1} \in U$

$h \in N_G(U) \Rightarrow hUh^{-1} = U$ $huh^{-1} \in hUh^{-1}$

$\rightarrow huh^{-1} \in U$

zu (2) Sei $v \in V$ z.zg.: $v \in N_G(U)$

$U \trianglelefteq V \Rightarrow vUv^{-1} = U \Rightarrow v \in N_G(U)$ □

Komplexprodukte und Normalteiler

Lemma (4.20)

Sei G eine Gruppe, und seien U und N Untergruppen von G.

(i) Gilt $U \cap N = \{e\}$, dann hat jedes Element $g \in UN$ eine eindeutige Darstellung der Form $g = un$, mit $u \in U$ und $n \in N$.

(ii) Gilt $U \subseteq N$, dann folgt $UN = N$.

(iii) Gilt $UN = NU$, dann ist UN eine Untergruppe von G. Ersteres ist insbesondere dann gegeben, wenn N ein Normalteiler von G ist.

(iv) Sind N und U Normalteiler von G, dann folgt $UN \trianglelefteq G$.

Beweis von Lemma 4.20

zu (ii) Vor.: $U \leq N$ z.zg.: $UN = N$

„⊇" Sei $n \in N$. $U \leq G \Rightarrow e_G \in U$

$e_G \in U, n \in N \Rightarrow n = e_G \cdot n \in UN$

„⊆" Sei $g \in UN \Rightarrow \exists u \in U, n \in N: g = un$

$U \leq N \Rightarrow u \in N \quad u, n \in N \Rightarrow g = un \in N$

zu (iii) Vor.: $UN = NU$ z.zg. $UN \leq G$

Überprüfe: (0) $e_G \in UN$ (1) $\forall g, h \in UN: gh \cdot g^{-1} \in UN$

zu (0) $e_G \in U, e_G \in N \Rightarrow e_G = e_G \cdot e_G \in UN$

zu (1) Seien $g, h \in UN \Rightarrow \exists u, u' \in U, n, n' \in N$

zu (1) Seien $g, h \in UN \Rightarrow \exists u, u' \in U, n, n' \in N$

mit $g = un$, $h = u'n' \Rightarrow gh = unu'n'$

$nu' \in NU \overset{\text{Vor.}}{\Rightarrow} nu' \in UN \Rightarrow \exists u'' \in U, n'' \in N$

mit $nu' = u''n''$ einsetzen $\rightarrow gh = u(nu')n' =$

$u(u''n'')n'$ $\quad U \leq G, u, u'' \in U \Rightarrow uu'' \in U$

$N \leq G, n'', n' \in N \Rightarrow n''n' \in N$

also: $gh = (uu'')(n''n') \in UN$

$g^{-1} = (un)^{-1} = n^{-1}u^{-1} \in NU$, $UN = NU$

$\Rightarrow g^{-1} \in UN$

Sehe nun $N \trianglelefteq G$ voraus. zu zeigen: $NU = UN$

„$\subseteq$" Sei $g \in NU$. $\Rightarrow \exists n \in N, u \in U$ mit $g = nu$

Es gilt $u^{-1}g = u^{-1}nu = u^{-1}n(u^{-1})^{-1} \in U^{-1}N(u^{-1})^{-1}$

$N \trianglelefteq G \Rightarrow u^{-1}g \in N \Rightarrow g = u(u^{-1}g) \in UN$

„2" Sei $g \in UN \Rightarrow \exists u \in U, n \in N: g = un$

Es gilt $gu^{-1} = unu^{-1} \in uNu^{-1} \overset{N \trianglelefteq G}{\Rightarrow} gu^{-1} \in N$

$\Rightarrow g = (gu^{-1})u \in NU$

zu (iv) Vor.: $N \trianglelefteq G$ und $U \trianglelefteq G$ bereits bekannt

wegen (iii): $UN \trianglelefteq G$

Sei $g \in G$ und $v \in UN$. z.zg: $gvg^{-1} \in UN$

$v \in UN \Rightarrow \exists u \in U, n \in N: v = un$

$gvg^{-1} = gung^{-1} = (gug^{-1})(gng^{-1})$

$U \trianglelefteq G \Rightarrow gug^{-1} \in U$, $N \trianglelefteq G \Rightarrow gng^{-1} \in N$

$\Rightarrow gvg^{-1} = (gug^{-1})(gxg^{-1}) \in UN$ □

Anwendungsbeispiel: Sei $n \geq 3$ und sei $\rho \in O(2)$ die Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$, $\tau \in O(2)$ die Spiegelung an der x-Achse. Beh.:

$D_n = \{\rho^k \circ \tau^l \mid 0 \leq k < n, l \in \{0,1\}\}$ ist eine Untergruppe von $O(2)$, die mit $\langle \rho, \tau \rangle$ übereinstimmt.

bereits bekannt: $\operatorname{ord}(\rho) = n$, $\operatorname{ord}(\tau) = 2$

Daraus folgt $\langle \rho \rangle = \{\rho^k \mid 0 \leq k < n\}$ und $\langle \tau \rangle = \{id_{\mathbb{R}^2}, \tau\} = \{\tau^0, \tau^1\}$ Somit ist $D_n = \langle \rho \rangle \langle \tau \rangle$, das Komplexprodukt von $\langle \rho \rangle$ und

$\langle\tau\rangle$ Um zu zeigen, dass D_n eine Untergruppe von $O(2)$ ist, genügt es also nach Lemma 4.20 zu überprüfen, dass $\langle\rho\rangle \trianglelefteq G$ für $G = \langle\rho, \tau\rangle$ erfüllt ist.

Um $\langle\rho\rangle \trianglelefteq G$ zu zeigen, genügt es $N_G(\langle\rho\rangle) = G$

Dafür wiederum reicht es zu zeigen, dass ρ, τ beide in $N_G(\langle\rho\rangle)$ liegen, denn aus $\{\rho, \tau\} \subseteq N_G(\langle\rho\rangle)$ folgt $G = \langle\rho, \tau\rangle \subseteq N_G(\langle\rho\rangle)$, wegen $N_G(\langle\rho\rangle) \leq G$, also auch $N_G(\langle\rho\rangle) = G$.

zu überprüfen also: (1) $\rho\langle\rho\rangle\rho^{-1} = \langle\rho\rangle$

(2) $\tau\langle\rho\rangle\tau^{-1} = \langle\rho\rangle$

Teil (1) ist klar, denn jedes Element in $\langle \rho \rangle$ hat die Form ρ^k mit $k \in \mathbb{Z}$, und $\rho \cdot \rho^k \cdot \rho^{-1} = \rho$.

(Die Inklusion $U \leq N_G(U)$ ist immer erfüllt.)

Zu (2) „$\subseteq$" Sei $\sigma \in \tau \langle \rho \rangle \tau^{-1} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$

$\sigma = \tau \rho^k \tau^{-1} = (\tau \rho \tau^{-1})^k = (\rho^{-1})^k = \rho^{-k} \in \langle \rho \rangle$

$\uparrow \tau \rho \tau^{-1} = \rho^{-1}$

„$\supseteq$" Sei $\sigma \in \langle \rho \rangle$, d.h. $\sigma = \rho^k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

$\overset{s.o.}{\Rightarrow} \rho^k = \tau \rho^{-k} \tau^{-1} \Rightarrow \sigma \in \tau \langle \rho \rangle \tau^{-1}$

□

Innere direkte Produkte

Definition (4.23)

Sei G eine Gruppe, und seien U, N Untergruppen von G. Wir bezeichnen G als inneres direktes Produkt von U und N, wenn gilt

- $U \trianglelefteq G$ und $N \trianglelefteq G$,
- $G = UN$ und
- $U \cap N = \{e\}$.

Ist lediglich N eine Normalteiler von G, aber nicht notwendigerweise die Untergruppe U, dann spricht man von einem inneren semidirekten Produkt.

Proposition (4.24)

Sei G eine Gruppe und inneres direktes Produkt ihrer Untergruppen U und N. Dann gilt $G \cong U \times N$.

Beispiele für innere direkte Produkte

(1) $G = (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$, $N = \langle \bar{2} \rangle$, $U = \langle \bar{3} \rangle$

Dann ist G ein inneres direktes Produkt von N und U

(klar: $N, U \leq G$, G abelsch $\Rightarrow N, U \trianglelefteq G$

$N = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$, $U = \{\bar{0}, \bar{3}\} \rightarrow U \cap N = \{\bar{0}\}$

$\bar{1} = \bar{3} + \bar{4} = U + N \Rightarrow \langle \bar{1} \rangle \subseteq U + N \Rightarrow G = U + N$)

Prop. 4.24 $\Rightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \langle \bar{3} \rangle \times \langle \bar{2} \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

(2) Seien K, H beliebige Gruppen. Dann ist $G = K \times H$ ein inneres direktes Produkt von $\tilde{K} = K \times \{e_H\}$ und $\tilde{H} = \{e_K\} \times H$ (Übung)

$1 = \bar{3} + \bar{4} = U + N \Rightarrow \langle \bar{1} \rangle \subseteq U + N \Rightarrow G = U + N$)

Prop. 4.24 $\Rightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \langle \bar{3} \rangle \times \langle \bar{2} \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

Beweis von Proposition 4.24:

Beh. Die Abbildung $\phi : U \times N \to G,\ (u,n) \mapsto un$ ist ein Isomorphismus von Gruppen. zu überprüfen:

(1) ϕ ist injektiv (2) ϕ ist surjektiv

(3) ϕ ist ein Gruppenhomomorphismus

zu (1) Seien $(u,n), (u',n') \in U \times N$ mit $\phi(u,n) = \phi(u',n')$. (*)

z.zg: $u = u'$, $n = n'$ Aus (*) folgt $un = u'n'$

Wegen $U \cap N = \{e\}$ und Lemma 4.20 (i) folgt daraus $u = u'$, $n = n'$.

zu (2) Sei $g \in G$. z.zg: $\exists (u,n) \in U \times N$ mit $\phi(u,n) = g$.

G innere dir. Prod. von $U, N \Rightarrow G = UN \Rightarrow g \in UN \Rightarrow$

$\exists u \in U, n \in N$: $un = g \Rightarrow \phi(u,n) = g$

zu (3) Seien $(u,n),(u',n') \in U \times N$. z.Zg:

$$\phi((u,n)\circ(u',n')) = \phi(u,n)\circ\phi(u',n')$$

äquivalent dazu: $\phi(uu',nn') = \phi(u,n)\cdot\phi(u',n')$

bzw. $uu'nn' = unu'n'$

Es gilt die Äquivalenz $uu'nn' = unu'n'$

$\overset{u^{-1}\circ}{\Longleftrightarrow}$ $u'nn' = nu'n'$ $\overset{\circ(n')^{-1}}{\Longleftrightarrow}$ $u'n = nu'$ $\overset{n^{-1}\circ}{\Longleftrightarrow}$

$n^{-1}u'n = u' \overset{\circ(u')^{-1}}{\Longleftrightarrow} n^{-1}u'n(u')^{-1} = e_G$

$N \trianglelefteq G \Rightarrow u'n(u')^{-1} \in N \Rightarrow n'u'n(u')^{-1} \in N$

$U \leq G \Rightarrow n^{-1}u'n = n^{-1}u'(n^{-1})^{-1} \in U \rightarrow$

$n^{-1}u'n(u')^{-1} \in U$ also:

$n^{-1}u'n(u')^{-1} \in N \cap U \overset{N\cap U = \{e\}}{\Longrightarrow} n^{-1}u'n(u')^{-1} = e$ □

Wiederholung: Induzierte Abbildungen

Satz (4.25)

Seien X und Y Mengen und $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf X.

(i) Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass für alle $x, x' \in X$ aus $x \equiv x'$ jeweils $f(x) = f(x')$ gilt, dann existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung $\bar{f} : X/\equiv \to Y$ mit $\bar{f}([x]) = f(x)$ für alle $x \in X$.

(ii) Ist $g : X \times X \to Y$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass für alls $x, x' \in X$ und $y, y' \in X$ aus $x \equiv x'$ und $y \equiv y'$ jeweils $g(x, y) = g(x', y')$ folgt, dann existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung $\bar{g} : (X/\equiv) \times (X/\equiv) \to Y$ mit $\bar{g}([x], [y]) = g(x, y)$ für alle $x, y \in X$.

Man nennt $\bar{f}$ bzw. $\bar{g}$ die durch f bzw. g induzierte Abbildung.

Beweis von Satz 4.25 (i) (Wdh.)

Sei $R \subseteq X$ ein Repräsentantensystem von $X/\equiv$.

Definiere nun $\bar{f} : X/\equiv \to Y$ durch $\bar{f}(A) = f(a_0)$, wobei a_0 jeweils den eindeutig bestimmten Repr. von $A \in X/\equiv$ in R bezeichnet.

Beh.: $\bar{f}([x]) = f(x) \quad \forall x \in X$

Sei $x \in X$ und $x_0 \in R$ der eindeutige Repr. von $[x]$.

Dann gilt $\bar{f}([x]) = f(x_0)$ nach Def. von $\bar{f}$.

zu zeigen also: $f(x_0) = f(x) \qquad x_0 \in [x]$ (da x_0 Repr. von $[x]$)

$\Rightarrow x_0 \equiv x \overset{\text{Vor. an } f}{\Longrightarrow} f(x_0) = f(x)$