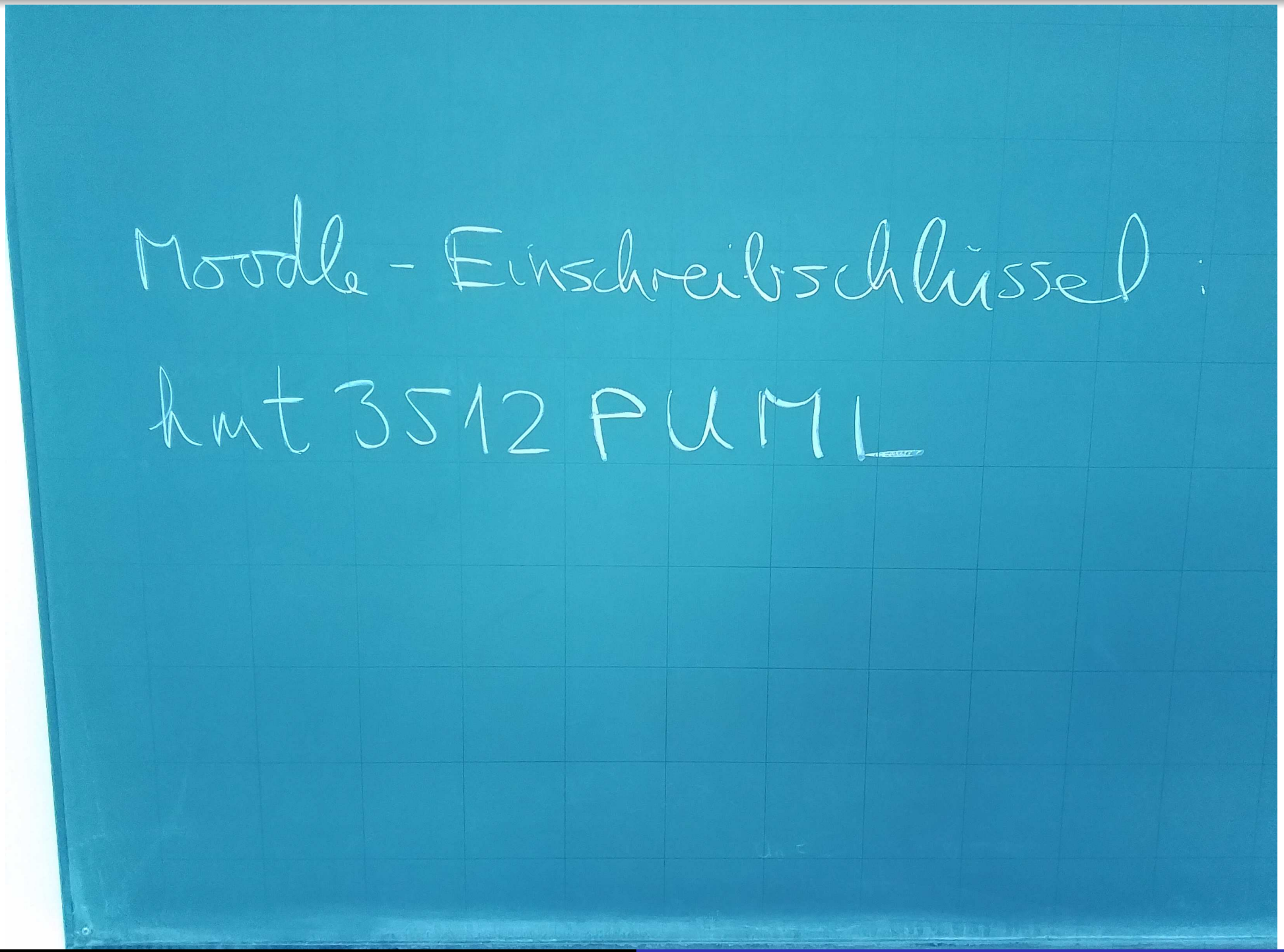

Moodle - Einschreibschlüssel:
hmt3512PUML

Die Symmetriegruppe einer Menge $T \subseteq \mathbb{R}^n$

Definition (1.5)

Die Menge der Bewegungen im $\mathbb{R}^n$ bildet zusammen mit der Komposition eine Gruppe, die wir mit $\mathcal{B}_n$ bezeichnen. Die orientierungserhaltenden Bewegungen bilden ebenso eine Gruppe; diese bezeichnen wir mit $\mathcal{B}_n^+$.

Definition (1.6)

Ist $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge, dann bezeichnet man

$$\mathrm{Sym}(T) \quad = \quad \{\phi \in \mathcal{B}_n \mid \phi(T) = T\}$$

als Symmetriegruppe von T. Die Elemente von $\mathrm{Sym}^+(T) = \mathrm{Sym}(T) \cap \mathcal{B}_n^+$ bezeichnet man als orientierungserhaltende Symmetrien der Menge T.

Die Diedergruppen

Definition (1.7)

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$, und für $0 \leq k < n$ sei der Punkt $P_{n,k} \in \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$P_{n,k} = \left(\cos(\tfrac{2\pi k}{n}), \sin(\tfrac{2\pi k}{n})\right).$$

Dann bezeichnen wir die konvexe Hülle der endlichen Punktmenge

$$\{P_{n,k} \mid 0 \leq k < n\}$$

als das regelmäßiges Standard-n-Eck Δ_n. Die Symmetriegruppe $D_n = \mathrm{Sym}(\Delta_n)$ wird die n-te Diedergruppe genannt.

Die Symmetriegruppe D_6 des regelm. 6-Ecks

60°-Drehung $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ v \mapsto R_{\pi/3} v$

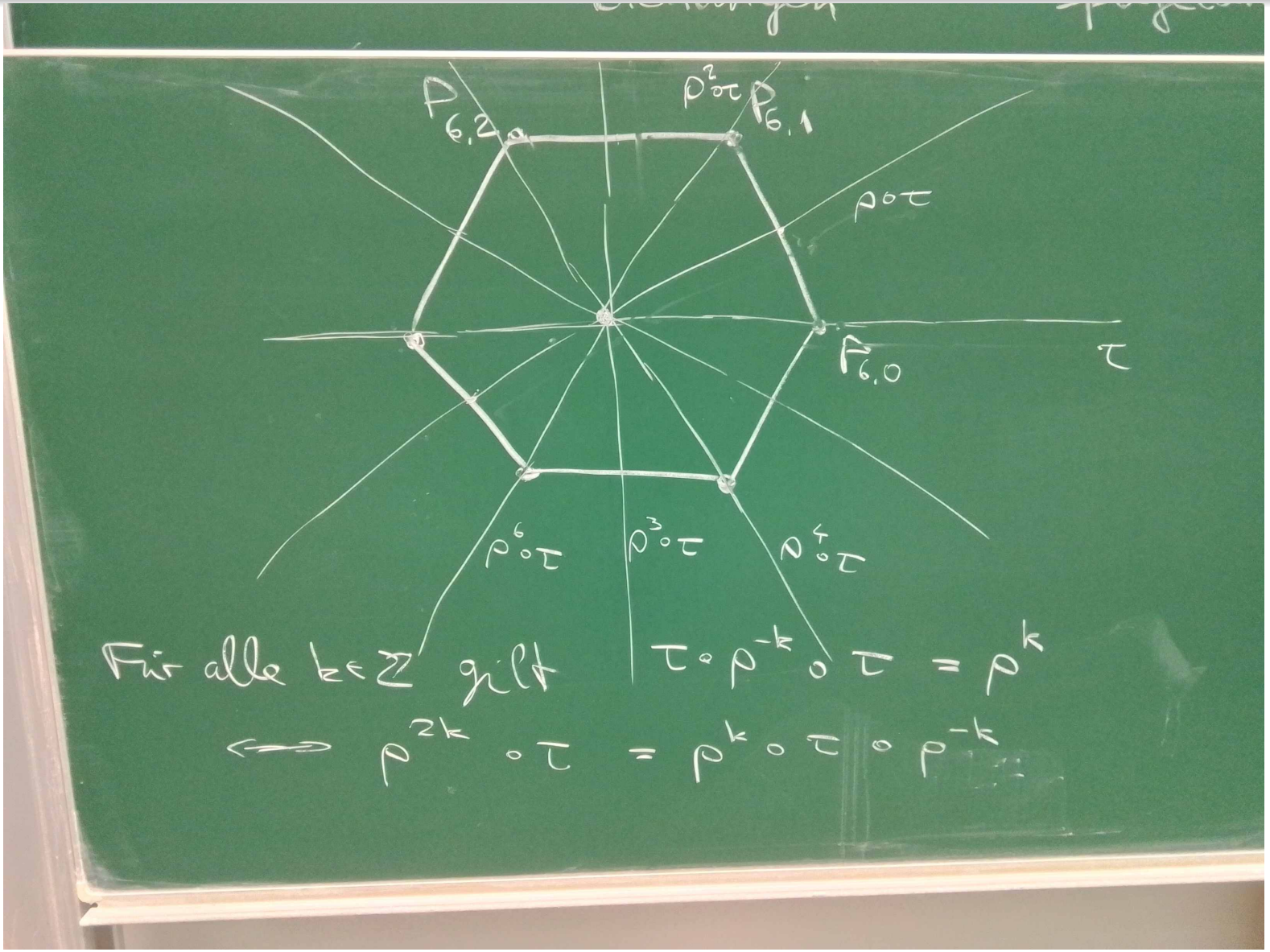
wobei $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ für bel. $\alpha \in \mathbb{R}$

Spiegelung an der x-Achse $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ v \mapsto Sv$

wobei $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Dann gilt $D_6 = \{ \rho^k \mid 0 \le k < 6 \} \cup \{ \rho^k \circ \tau \mid 0 \le k < 6 \}$

Drehungen Spiegelungen



Hinweis: Die Beschriftung $\rho^6 \circ \tau$ im Bild ist nicht korrekt. Dieses Element stimmt wegen $\rho^6 = \mathrm{id}$ mit der Spiegelung an der x-Achse, also mit τ, überein.

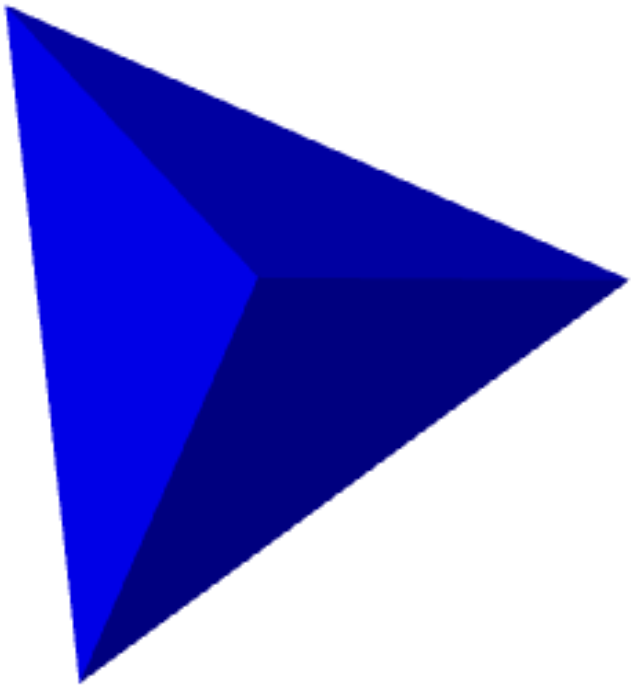
Definition der Plantonischen Körper

Zwei Teilmengen $S, T \subseteq \mathbb{R}^3$ werden als kongruent bezeichnet, wenn ein $\phi \in \mathcal{B}_n$ mit $\phi(S) = T$ existiert.

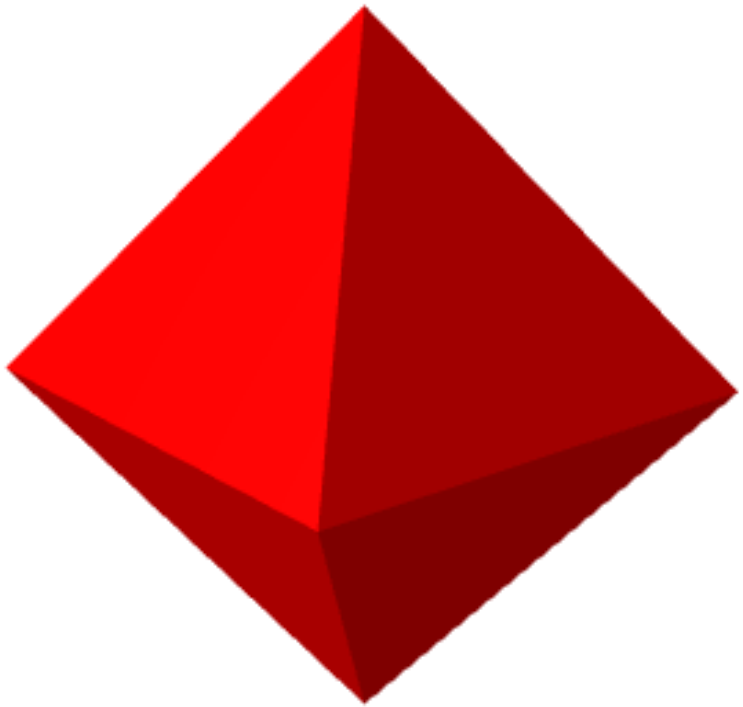
Definition (1.8)

Ein nicht ausgeartetes Polytop im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet man als regulär oder auch als Platonischen Körper, wenn all seine Seiten zueinander kongruente regelmäßige n-Ecke sind und sich an jeder Ecke dieselbe Anzahl von Seiten treffen.

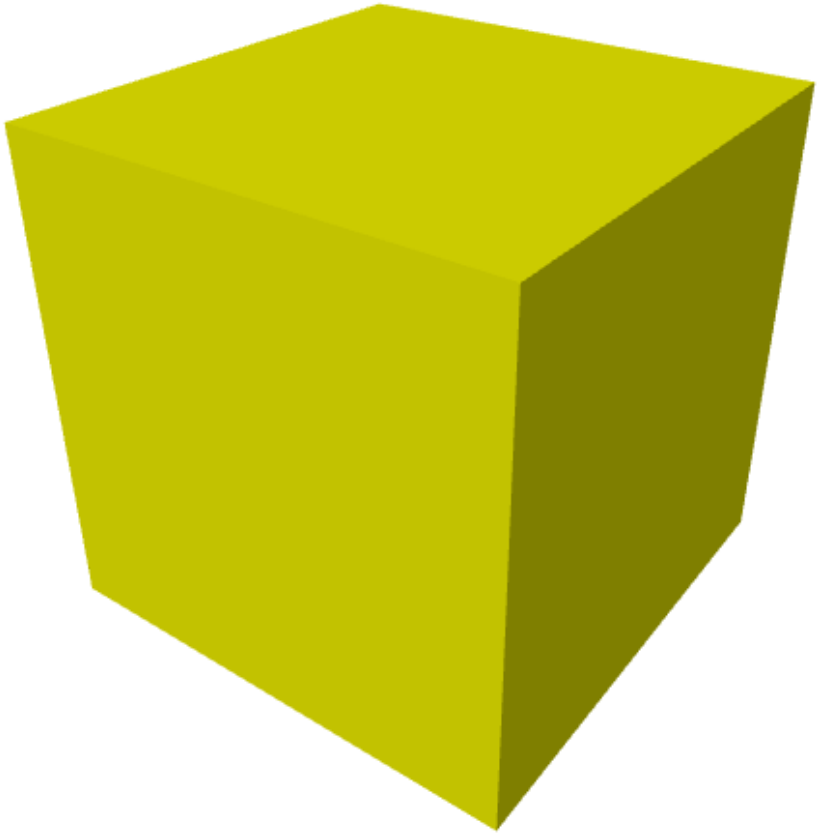
Platonische Körper - Tetraeder



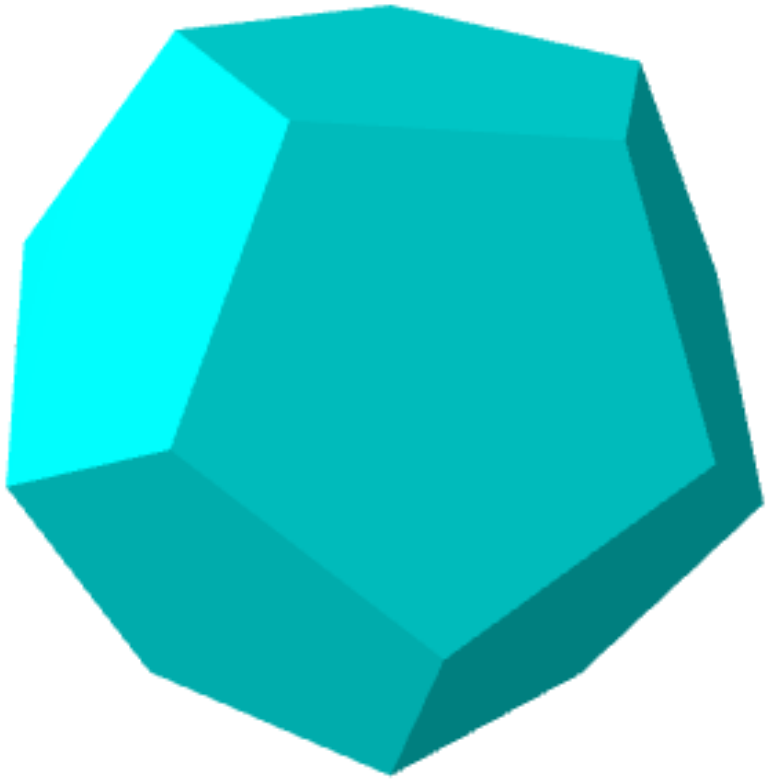
Platonische Körper - Oktaeder



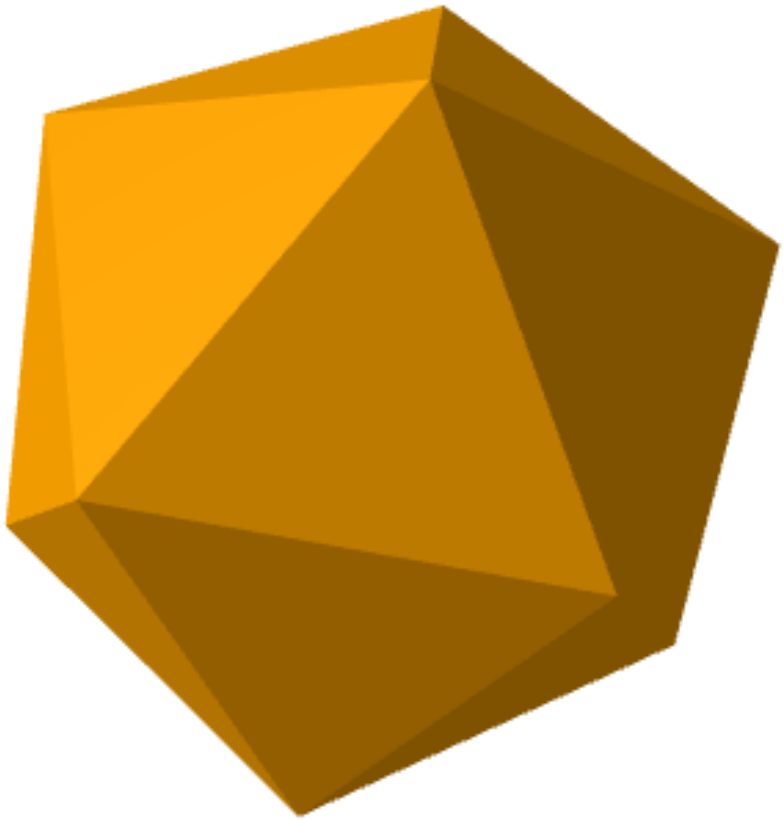
Platonische Körper - Würfel



Platonische Körper - Dodekader



Platonische Körper - Ikosaeder



Die Symmetriegruppen der platonischen Körper

Definition (1.9)

Bezeichnet $\mathbb{T}$ einen beliebigen Tetraeder, dann nennt man $\mathrm{Sym}(\mathbb{T})$ eine Tetraedergruppe und $\mathrm{Sym}^+(\mathbb{T})$ eine eigentliche Tetraedergruppe. Ist $\mathbb{O}$ ein Oktaeder, dann wird $\mathrm{Sym}(\mathbb{O})$ eine Oktaedergruppe und $\mathrm{Sym}^+(\mathbb{O})$ eine eigentliche Oktaedergruppe. Entsprechend werden (eigentliche) Würfelgruppen, Dodekaedergruppen und Ikosaedergruppen definiert.

Äußeres direktes Produkt

Definition (1.10)

Seien G und H Gruppen. Dann bildet das kartesische Produkt $G \times H$ mit der Verknüpfung $*$ gegeben durch

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) \quad = \quad (g_1 g_2, h_1 h_2)$$

für alle $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times H$ ebenfalls eine Gruppe. Man nennt sie das (äußere) direkte Produkt von G und H. Sind G und H abelsch, dann gilt dasselbe für $(G \times H, *)$.

zu Def. 1.10: Gruppenstr. von $(G \times H, *)$

klar: Durch $(g,h) * (g',h') = (gg', hh')$
ist eine Verknüpfung auf $G \times H$ definiert.

- Assoziativität: Seien $(g,h), (g',h'), (g'',h'') \in G \times H$ vorgegeben.

$$((g,h) * (g',h')) * (g'',h'') =$$

$$(gg', hh') * (g'',h'') = ((gg')g'', (hh')h'')$$

$$= (g(g'g''), h(h'h'')) = (g,h) * (g'g'', h'h'')$$

$$= (g,h) * ((g',h') * (g'',h''))$$

- Zeige: (e_G, e_H) ist Neutralelt. in $(G \times H, *)$

  Sei $(g,h) \in G \times H$. $(g,h) * (e_G, e_H) = (g e_G, h e_H) = (g,h)$, $(e_G, e_H) * (g,h) = (e_G g, e_H h) = (g,h)$

- Sei $(g,h) \in G \times H$ Beh.: (g^{-1}, h^{-1}) ist Inverses von (g,h). $(g,h) * (g^{-1}, h^{-1}) = (g g^{-1}, h h^{-1}) = (e_G, e_H)$, $(g^{-1}, h^{-1}) * (g,h) = (g^{-1} g, h^{-1} h) = (e_G, e_H)$

insgesamt: $(G \times H, *)$ ist eine Gruppe, mit $e_{G \times H} = (e_G, e_H)$ als Neutralelement, und es gilt $(g,h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1}) \quad \forall (g,h) \in G \times H$.

Setze nun voraus, dass G und H abelsch sind.

zeige: $(G \times H, *)$ ist abelsche Gruppe

Seien $(g,h), (g',h') \in G \times H$.

$$(g,h) * (g',h') = (gg', hh') = (g'g, h'h) = (g',h') * (g,h)$$

Σ G, H abelsch

□

Eindeutigkeit des Neutralelements in einem Monoid: Sei G ein Monoid und $e, e' \in G$ beides Neutralelemente. Dann gilt

$$e = ee' = e'$$

Γ e Neutralelt.

Σ e' Neutralelt.

Halbgruppen und Monoide

Definition (1.11)

(i) Eine Halbgruppe ist ein Paar $(G, *)$ bestehend aus einer nichtleeren Menge G und einer assoziativen Verknüpfung $*$ auf G.

(ii) Ein Element $e \in G$ der Halbgruppe wird als Neutralelement bezeichnet, wenn $e * a = a$ und $a * e = a$ für alle $a \in G$ erfüllt ist.

(iii) Eine Halbgruppe mit mindestens einem Neutralelement bezeichnet man als Monoid.

Jede Halbgruppe besitzt höchstens ein Neutralelement.

Invertierbare Elemente in einem Monoid

Definition (1.12)

Sei $(G, *)$ ein Monoid mit dem Neutralelement e_G. Ein Element $g \in G$ wird invertierbar in $(G, *)$ genannt, wenn ein $h \in G$ mit $g * h = h * g = e_G$ existiert. Man nennt h in diesem Fall ein Inverses von g.

Rechenregeln für invertierbare Elemente

Proposition (1.13)

Sei $(G, *)$ ein Monoid.

(i) Jedes Element $g \in G$ besitzt höchstens ein Inverses; sofern es existiert, wird es mit g^{-1} bezeichnet.

(ii) Seien $g, h \in G$ invertierbare Elemente. Dann sind auch die Elemente $g * h$ und g^{-1} invertierbar, und es gilt $(g * h)^{-1} = h^{-1} * g^{-1}$ und $(g^{-1})^{-1} = g$.

(iii) Das Neutralelement e_G ist invertierbar, und es gilt $e_G^{-1} = e_G$.

Beweis von Proposition 1.13

zu (i) Sei $g \in G$. Ang., h und h' sind beides Inverse von g. $\Rightarrow h = e_G * h = (h' * g) * h = h' * (g * h)$

$= h' * e_G = h'$

zu (ii) Seien $g, h \in G$

Beh $h^{-1} * g^{-1}$ ist ein Inverses von $g * h$. (Daraus folgt, dass es das Inverse von $g * h$ ist, also $(g*h)^{-1}$ $= h^{-1} * g^{-1}$ q.e.d.) $(h^{-1} * g^{-1}) * (g * h) = h^{-1} * (g^{-1} * g) * h$

$= h^{-1} * e_G * h = h^{-1} * h = e_G$, $(g * h) * (h^{-1} * g^{-1}) =$

$g * (h * h^{-1}) * g^{-1} = g * e_G * g^{-1} = g * g^{-1} = e_G$

$g * (h * h^{-1}) * g^{-1} = g * e_G * g^{-1} = g * g^{-1} = e_G$

Beh. g ist ein Inverses von g^{-1} (somit $(g^{-1})^{-1} = g$)

$g * g^{-1} = e_G$, $g^{-1} * g = e_G$ ($\Rightarrow$ Eig. des Inversen gegeben)

zu (iii) Die Gleichung $e_G * e_G = e_G$ zeigt, dass e_G ein Inverses von e_G ist. ($\Rightarrow$ e_G invertierbar, $e_G^{-1} = e_G$). □

Unter einer Verknüpfung abgeschlossene Mengen

Definition (1.14)

Sei $(X, \circ)$ eine Menge mit einer Verknüpfung. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ wird abgeschlossen unter $\circ$ genannt, wenn für alle $x, y \in U$ auch das Element $x \circ y$ in U liegt.

Bem. Sei $(G, \circ)$ eine Menge mit einer Verknüpfung und $U \subseteq G$. Wenn U unter $\circ$ abgeschlossen ist, dann liefert $\circ$ eine Verknüpfung $\circ_U$ auf U, die definiert ist durch $u \circ_U v = u \circ v \quad \forall u, v \in U$.

Bsp $(\mathbb{Z}, +)$ $U = \{0\}$ ist abgeschl. bzgl. $+$
$\Rightarrow$ erhalte eine Verknüpfung $+_U$ auf $\{0\}$,
geg. $0 +_U 0 = 0$.

Die Gruppe der invertierbaren Elemente

Satz (1.15)

Sei $(G, *)$ ein Monoid und $G^\times \subseteq G$ die Teilmenge der invertierbaren Elemente. Dann ist $G^\times$ abgeschlossen unter der Verknüpfung $*$, und $(G^\times, *_{G^\times})$ ist eine Gruppe. Das Neutral-´element e_G von G ist zugleich das Neutralelement von $(G^\times, *_{G^\times})$.

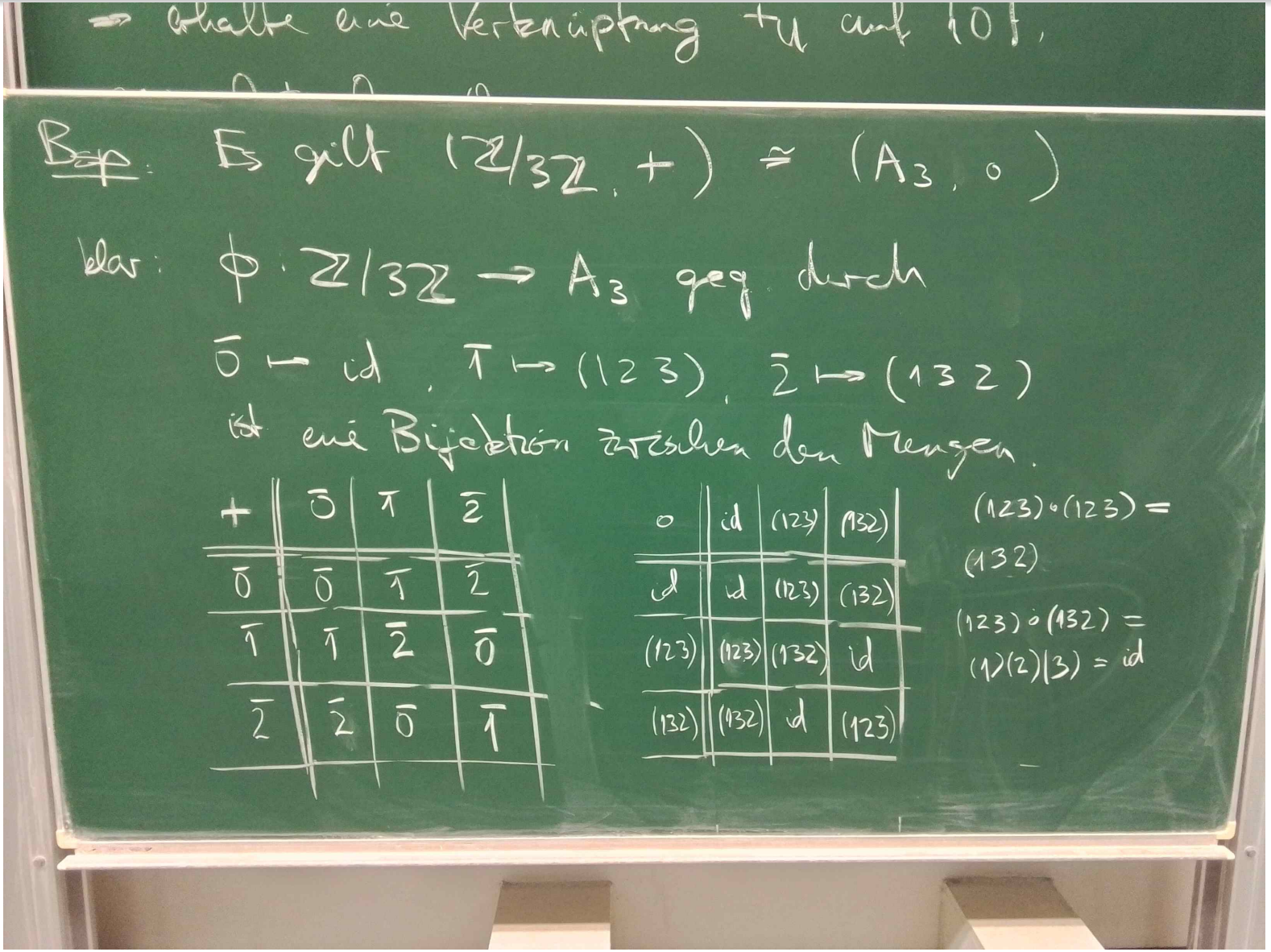
Der Isomorphiebegriff

Definition (1.16)

Man bezeichnet zwei Gruppen $(G, \cdot)$ und $(H, *)$ als isomorph und schreibt $G \cong H$, wenn eine bijektive Abbildung $\phi : G \to H$ existiert, so dass

$$\phi(g \cdot g') \quad = \quad \phi(g) * \phi(g')$$

für alle $g, g' \in G$ erfüllt ist.



Hinweis: Der Isomorphismus zwischen den beiden Gruppen zeigt sich dadurch, dass die linke Tabelle in die rechte übergeht, wenn man überall die Elemente $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$ gemäß der Bijektion ersetzt.

Beispiele für Isomorphien (Beweise folgen)

(i) Es gilt $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

(ii) Jede Diedergruppe D_n (mit $n \geq 3$) ist isomorph zu einer $2n$-elementigen Untergruppe von S_n.

(iii) Für die Symmetriegruppen des Tetraeders gilt $\mathrm{Sym}^+(\mathbb{T}) \cong A_4$ und $\mathrm{Sym}(\mathbb{T}) \cong S_4$.

(iv) Es gilt $\mathrm{Sym}^+(\mathbb{O}) \cong \mathrm{Sym}^+(\mathbb{W}) \cong S_4$ und $\mathrm{Sym}(\mathbb{O}) \cong \mathrm{Sym}(\mathbb{W}) \cong S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ für die Symmetriegruppen von Würfel und Oktaeder.

(v) Für die Symmetriegruppen von Dodekaeder und Ikosaeder gilt $\mathrm{Sym}^+(\mathbb{D}) \cong \mathrm{Sym}^+(\mathbb{I}) \cong A_5$ und $\mathrm{Sym}(\mathbb{D}) \cong \mathrm{Sym}(\mathbb{I}) \cong A_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Das Klassifikationsproblem

Definition (1.17)

Das Klassifikationsproblem für endliche Gruppen kann folgendermaßen formuliert werden: Gegeben ein $n \in \mathbb{N}$, bestimme alle Gruppen mit n Elementen bis auf Isomorphie.

Damit ist gemeint: Bestimme eine Zahl $r(n)$ und Gruppen $G_1, G_2, ..., G_{r(n)}$ mit der Eigenschaft, dass *jede* Gruppe G mit $|G| = n$ zu genau einer dieser Gruppen isomorph ist.

Ergebnisse der Klassifizierung

Im weiteren Verlauf der Vorlesung werden wir zeigen

- Ist p eine Primzahl, dann ist jede Gruppe G mit $|G| = p$ isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Es gilt also $r(p) = 1$.
- Für jede Primzahl p gilt: Jede Gruppe G mit $|G| = p^2$ ist entweder isomorph zu $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ oder isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Es gilt also $r(p^2) = 2$.
- Für jede ungerade Primzahl p gilt außerdem: Jede Gruppe der Ordnung $2p$ ist entweder isomorph zu $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$ oder zur Diedergruppe D_p. Es gilt also auch $r(2p) = 2$.

Gruppen der Ordnung ≤ 15 bis auf Isomorphie

n	$r(n)$	Gruppen bis auf Isomorphie
1	1	$\mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$
2	1	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
3	1	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
4	2	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
5	1	$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
6	2	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z},\ S_3$
7	1	$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$
8	5	$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3,\ D_4,\ Q_8$

Gruppen der Ordnung ≤ 15 bis auf Isomorphie (Forts.)

n	$r(n)$	Gruppen bis auf Isomorphie
9	2	$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
10	2	$\mathbb{Z}/10\mathbb{Z},\ D_5$
11	1	$\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$
12	5	$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z},\ D_6,\ A_4,\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
13	1	$\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$
14	2	$\mathbb{Z}/14\mathbb{Z},\ D_7$
15	1	$\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$