

§ 1. Definition der Gruppen, Beispiele

Definition (1.1)

Eine **Gruppe** ist ein Paar $(G, *)$ bestehend aus einer nichtleeren Menge G und einer Verknüpfung $*$ auf G (also einer Abbildung $G \times G \rightarrow G$), so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- (i) Die Verknüpfung ist assoziativ, d.h. es gilt $(a * b) * c = a * (b * c)$ für alle $a, b, c \in G$.
- (ii) Es gibt ein ausgezeichnetes Element $e \in G$, genannt das **Neutralelement** der Gruppe, mit der Eigenschaft, dass $e * a = a * e = a$ für alle $a \in G$ gilt.
- (iii) Für jedes Element $a \in G$ gibt es ein Element $a^{-1} \in G$, genannt das zu a **inverse Element**, mit $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Gilt darüber hinaus $a * b = b * a$ für alle $a, b \in G$, dann spricht man von einer **abelschen** oder auch einer **kommutativen** Gruppe.

Beispiele für abelsche Gruppen:

i) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ Ring $\Rightarrow (\mathbb{R}, +)$ abelsche Gruppe

$0_{\mathbb{R}}$ ist Neutralelement, $-a$ ist Inverses von a

ii) $(K, +, \cdot)$ Körper, $K^* = K \setminus \{0_K\} \quad \forall a \in K$
 $\Rightarrow (K^*, \cdot)$ ist abelsche Gruppe

1_K ist Neutralelement, a^{-1} ist Inverses von $a \quad \forall a \in K^*$

iii) K Körper, $(V, +, \cdot)$ K -Vektorraum

$\Rightarrow (V, +)$ abelsche Gruppe

Bsp: $(\mathbb{R}^3, +)$

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

Definition der Permutationsgruppen

Definition (1.2)

Sei X eine Menge. Dann ist das Paar $(\text{Per}(X), \circ)$ bestehend aus der Teilmenge $\text{Per}(X) \subseteq \text{Abb}(X)$ der **bijektiven** Abbildungen $X \rightarrow X$ und der Komposition $\circ$ von Abbildungen eine Gruppe, die man als **Permutationsgruppe** der Menge X bezeichnet. Die Elemente von $\text{Per}(X)$ nennt man auch **Permutationen** von X .

Sei X eine Menge. Nachweis der Gruppeneigenschaften von $(\text{Per}(X), \circ)$

- Die Komposition von bij. Abb. ist bijektiv.
 $\Rightarrow$ Für alle $\sigma, \tau \in \text{Per}(X)$ gilt $\sigma \circ \tau \in \text{Per}(X)$,
d.h. $\circ$ ist Verknüpfung auf $\text{Per}(X)$

- Assoziativgesetz: Seien $\rho, \sigma, \tau \in \text{Per}(X)$

$$\begin{aligned}\forall x \in X: ((\rho \circ \sigma) \circ \tau)(x) &= (\rho \circ \sigma)(\tau(x)) = \\ \rho(\sigma(\tau(x))) &= \rho((\sigma \circ \tau)(x)) = (\rho \circ (\sigma \circ \tau))(x) \\ \Rightarrow (\rho \circ \sigma) \circ \tau &= \rho \circ (\sigma \circ \tau)\end{aligned}$$

- Assoziativgesetz: Seien $\rho, \sigma, \tau \in \text{Per}(X)$

$$\forall x \in X: (\rho \circ \sigma) \circ \tau = \rho \circ (\sigma \circ \tau)$$

- id_X ist Neutralement, denn:

$$\text{Sei } \sigma \in \text{Per}(X). \quad \forall x \in X: (\sigma \circ \text{id}_X)(x) =$$

$$\sigma(\text{id}_X(x)) = \sigma(x) \Rightarrow \sigma \circ \text{id}_X = \sigma, \text{ ebenso } \text{id}_X \circ \sigma = \sigma$$

- Inverse: Sei $\sigma \in \text{Per}(X)$. bekannt: σ besitzt (auf Grund der Bijektivität) eine Umkehrabb., die mit σ^{-1} bezeichnet wird, erfüllt nach Def. die Gleichungen

$$\sigma^{-1} \circ \sigma = \text{id}_X, \quad \sigma \circ \sigma^{-1} = \text{id}_X$$

wichtiger Spezialfall:

Ist $X = M_n = \{1, 2, \dots, n\}$ (mit $n \in \mathbb{N}$),

dann wird $\text{Per}(M_n)$ auch die sym-
metrische Gruppe (in n Elementen)

genannt, Bezeichnung S_n .

Tabellenschreibweise:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ entspricht der Abb. $k \mapsto a_k$
($1 \leq k \leq n$)

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$