Bahnlänge und Ordnung des Stabilsators

Satz (7.6)

Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert, und sei $x \in X$. Dann gibt es eine Bijektion

$$\phi_x : G/G_x \to G(x)$$

mit $\phi_x(gG_x) = g \cdot x$ für alle $g \in G$. Ist insbesondere X endlich, dann ist auch der Index $(G : G_x)$ endlich, und es gilt $(G : G_x) = |G(x)|$.

Definition (7.7)

Sei G eine Gruppe und $\mathcal{U}$ die Menge ihrer Untergruppen.

(i) Die Operation von G auf der Menge ihrer Elemente gegeben durch $g \cdot h = gh$ bezeichnet man als Operation durch Linkstranslation.

(ii) Die Operation von G auf der Menge ihrer Elemente gegeben durch $g \cdot h = ghg^{-1}$ wird Operation durch Konjugation genannt.

(iii) Die Operation von G auf $\mathcal{U}$ gegeben durch $g \cdot U = gUg^{-1}$ wird ebenfalls als Operation durch Konjugation bezeichnet.

Gruppenoperationen und Homomorphismen nach $\mathrm{Per}(X)$

Satz (7.8)

Sei G eine Gruppe und X eine Menge.

(i) Ist $\alpha : G \times X \to X$ eine Gruppenoperation, dann kann jedem $g \in G$ durch $\tau_g(x) = \alpha(g, x)$ ein Element aus $\mathrm{Per}(X)$ zugeordnet werden. Die Abbildung $G \to \mathrm{Per}(X)$, $g \mapsto \tau_g$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

(ii) Sei umgekehrt $\phi : G \to \mathrm{Per}(X)$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist durch $\alpha : G \times X \to X$ mit $\alpha(g, x) = \phi(g)(x)$ eine Gruppenoperation gegeben.

Der Satz von Cayley

Satz (7.9)

Sei G eine Gruppe der Ordnung $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es einen Monomorphismus $G \to S_n$. Mit anderen Worten, G ist isomorph zu einer Untergruppe von S_n.

wichtiges Nebenergebnis des Beweises:

Operiert eine Gruppe G auf einer n-elementigen Mengen ($n \in \mathbb{N}$), dann liefert diese Operation auf natürliche Weise einen Homomorphismus $G \to S_n$.

Repräsentantensysteme der Bahnen

Definition (7.10)

Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert, $\mathcal{B}$ die Menge der Bahnen dieser Operation und $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$ eine Teilmenge. Eine Teilmenge $R \subseteq X$ wird Repräsentantensystem von $\mathcal{S}$ genannt, wenn $G(x) \in \mathcal{S}$ für alle $x \in R$ gilt und die Abbildung $R \to \mathcal{S}$, $x \mapsto G(x)$ bijektiv ist.

Satz (7.11)

Sei G eine Gruppe, die auf einer endlichen Menge X operiert. Sei $F \subseteq X$ die Fixmpunktmenge der Operation und $R \subseteq X$ ein Repräsentantensystem der Menge aller Bahnen $G(x)$ mit mindestens zwei Elementen. Dann gilt

$$|X| \quad = \quad |F| + \sum_{x \in R} (G : G_x)$$

und $(G : G_x) > 1$ für alle $x \in R$.

jeweils ein k_j-Zykel, für $1 \le j \le r$.

Beweis von Satz 7.10:

geg. Gruppenoperation $\circ : G \times X \to X$ (G Gruppe, X Menge)

$F \subseteq X$ Menge der Fixpunkte

$R \subseteq X$ Repräsentantensystem der Bahnen B mit $|B| > 1$

(Dann ist $F \cup R$ ist ein Repräsentantensystem aller Bahnen.)

Bezeichne mit $\mathcal{B}$ die Menge aller Bahnen. Weil dies eine Zerlegung von X ist, erhalten wir

$$|X| = \sum_{B \in \mathcal{B}} |B| = \sum_{x \in F \cup R} |G(x)| = \sum_{x \in F} |G(x)| + \sum_{x \in R} |G(x)|$$

$$= \sum_{x \in F} |\{x\}| + \sum_{x \in R} (G:G_x) = |F| + \sum_{x \in R} (G:G_x) \qquad \square$$

↳ Satz 7.6

Korrektur erste Zeile: „Beweis von Satz 7.11“

Anwendung: Disjunkte Zykelzerlegung der Permutationen

Satz (7.12)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann besitzt jedes $\sigma \in S_n$ eine Darstellung $\sigma = \tau_1 \circ ... \circ \tau_r$ als Produkt paarweise disjunkter Zykel τ_j, und diese Darstellung ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig bestimmt.

Beweis von Satz 7.12:

geg.: $n \in \mathbb{N}$, $\sigma \in S_n$

Beh.: σ ist als Produkt disjunkter Zykel darstellbar

<u>Existenz</u> einer solchen Darstellung:

Betrachte die Operation von $\langle \sigma \rangle$ auf der Menge $M_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Seien $B_1, \dots, B_r \subseteq M_n$ die Bahnen dieser Operation mit mehr als einem Element. Definiere $\sigma_j \in S_n$ für $1 \leq j \leq n$ durch

$$\sigma_j(x) = \begin{cases} \sigma(x) & \text{falls } x \in B_j \\ x & \text{sonst} \end{cases}.$$

Weil die Bahnen $B_1, \dots, B_r$ disjunkt sind, gilt $\sigma = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_r$. (Im Fall $x \notin \dot{\bigcup}_{j=1}^{r} B_j$ gilt $\sigma(x) = x = (\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_r)(x)$, und im Fall $x \in B_j$ gilt $\sigma(x) = \sigma_j(x) = (\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_r)(x)$.) Setzen wir $k_j = |B_j|$, dann ist σ_j jeweils ein k_j-Zykel, für $1 \leq j \leq r$.

denn: Wähle jeweils $a \in B_j$ beliebig. Das kleinste $l \in \mathbb{N}$ mit $\sigma^l(a) = a$ ist k_j (sonst hätte $B_j = \langle\sigma\rangle(a)$ weniger als k_j Elemente). Definiert man nun $a_{jl} = \sigma^l(a)$ für $0 \leq l \leq k_j - 1$, dann stimmt σ_j offenbar mit $(a_{j0}\ a_{j1} \dots a_{j,k_j-1})$ überein.

Eindeutigkeit einer solchen Zerlegung:

Sei nun $\sigma = \tilde{\sigma}_1 \circ \dots \circ \tilde{\sigma}_s$ eine beliebige Zerlegung von σ in disjunkte Zykel.

Dann bilden die Elemente des Trägers von $\tilde{\sigma}_i$ jeweils eine Bahn der Operation von $\langle\sigma\rangle$ auf M_n für $1 \leq i \leq s$. Daraus folgt, dass die

B

ge

Be

Für

$\forall g \in$

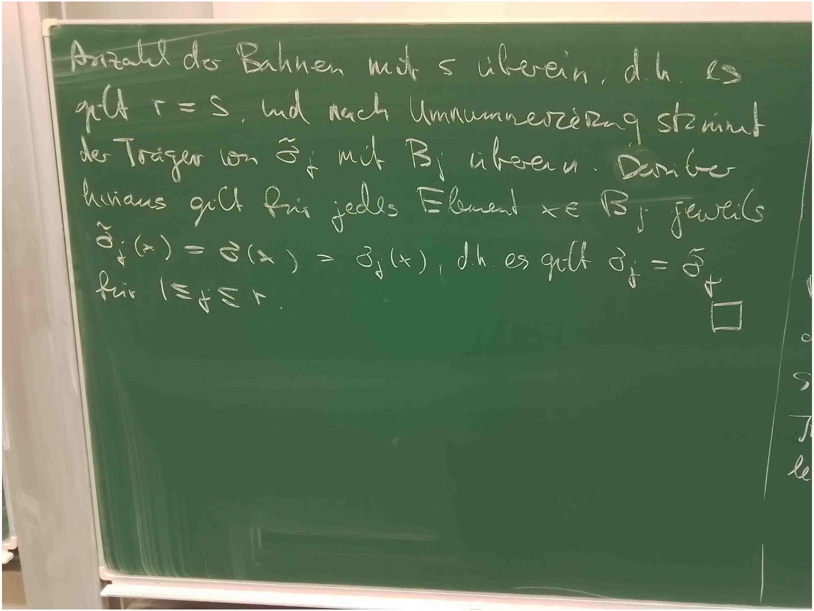
$\Leftrightarrow$

Für

$\forall h \in$

$\Leftrightarrow \forall$

$\Leftrightarrow$



Korrektur erste Zeile: „… mit s überein stimmt, d.h. …“

Merkmale der Operation durch Konjugation

Proposition (7.13)

Der Stabilisator eines Elements $h \in G$ unter der Operation durch Konjugation ist gegeben durch $C_G(h) = \{g \in G \mid gh = hg\}$. Die Fixpunkte der Operation sind die Elemente der Menge

$$Z(G) \quad = \quad \{g \in G \mid gh = hg \ \forall \ h \in G\} \quad ,$$

dem sogenannten Zentrum. Auch $Z(G)$ ist eine Untergruppe, darüber hinaus sogar ein Normalteiler von G.

Beweis von Prop 7.13:

geg. Gruppe G

Betrachte die Operation durch Konjugation

- geg. durch $g \cdot h = ghg^{-1} \ \forall g, h \in G$.

Für den Stabilisator eines Elements h gilt

$\forall g \in G: g \in G_h \Leftrightarrow g \cdot h = h \Leftrightarrow ghg^{-1} = h$

$\Leftrightarrow gh = hg \Leftrightarrow g \in C_G(h)$ (Zentralisator)

Für die Fixpunktmenge F der Operation gilt:

$\forall h \in G: h \in F \Leftrightarrow \forall g \in G: g \cdot h = h$

$\Leftrightarrow \forall g \in G: ghg^{-1} = h \Leftrightarrow \forall g \in G: gh = hg$

$\Leftrightarrow h \in Z(G)$

$\square$

Die Klassengleichung

Satz (7.14)

Sei G eine endliche Gruppe, die durch Konjugation auf sich selbst operiert. Sei R ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen mit mehr als einem Element. Dann gilt

$$|G| \quad = \quad |Z(G)| + \sum_{g \in R} (G : C_G(g)).$$

Diese Gleichung erhält man durch Anwendung der Bahngleichung auf die Operation durch Konjugation der Gruppe G auf der Menge ihrer Elemente.

Bem zu Satz 7.14:

Die Konjugationsklasse $[h]$ eines Elements $h \in G$ ist definiert durch

$$[h] = \{ghg^{-1} \mid g \in G\} = \{g \cdot h \mid g \in G\}.$$

Es handelt sich also um die Bahn von h unter der Operation $\cdot$ durch Konjugation.

s.o. $\Rightarrow$ $Z(G)$ ist die Fixpunktmenge der Op.

Insgesamt ist die Klassengleichung also lediglich ein Spezialfall der Bahngleichung.

Beispiele für die Klassengleichung: S_n

Proposition (7.15)

Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $\sigma, \sigma' \in S_n$ zwei nicht-triviale Elemente. Genau dann sind σ, σ' zueinander konjugiert, wenn sie denselben Zerlegungstyp besitzen.

Daraus folgt, dass die Konjugationsklassen in S_n genau den Zerlegungstypen der Elemente entsprechen.

Beispiel zu Proposition 7.15:

Beh.: Die Elemente $\sigma, \sigma' \in S_7$ geg. durch

$$\sigma = (1\,3\,5)(2\,4), \quad \sigma' = (1\,6\,7)(3\,4)$$

sind in S_7 zueinander konjugiert, liegen also in derselben Konjugationsklasse.

z.zg: $\exists\, \tau \in S_7$ mit $\sigma' = \tau \cdot \sigma = \tau \sigma \tau^{-1}$

Sei $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (2\,3\,6)(5\,7)$.

$$\Rightarrow \tau \sigma \tau^{-1} = (2\,3\,6)(5\,7)(1\,3\,5)(2\,4)(2\,6\,3)(5\,7)$$

$$= (1\,6\,7)(2)(3\,4)(5) = (1\,6\,7)(3\,4) = \sigma'.$$

Bestimmung der Klassengleichung für S_n

Lemma (7.16)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $2 \leq k \leq n$. Ist $A \subseteq M_n$ eine k-elementige Teilmenge, so beträgt die Anzahl der k-Zykel σ mit $\mathrm{supp}(\sigma) = A$ genau $(k-1)!$.

Folgerung (7.17)

Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{2, ..., n\}$ gibt es jeweils genau $(k-1)!\binom{n}{k}$ Zykel der Länge k.

Beispiele: Klassengleichungen der symm. Gruppen

$n=3$ $\quad |S_3| = 6 = \underset{\text{Zentrum }\{id\}}{1} + \overset{2\text{-Zykel}}{3} + \underset{3\text{-Zykel}}{2}$

$n=4$ $\quad |S_4| = 24 = 1 + \underset{2\text{-Zykel}}{6} + \overset{3\text{-Zykel}}{8} + \underset{4\text{-Zykel}}{6} + \overset{\text{Doppeltransp}}{3}$

$n=5$ $\quad |S_5| = 120 = 1 + \overset{2\text{-Zykel}}{10} + \underset{3\text{-Zykel}}{20} + \overset{4\text{-Zykel}}{30} + 24$
$\quad + \underset{\text{Doppeltransp.}}{15} + \underset{\text{Zerlegungstyp }(3,2)}{20}$

Anzahl 2-Zykel: $(2-1)!\binom{5}{2} = 10$

Anzahl 3-Zykel: $(3-1)!\binom{5}{3} = 20$

" 4-Zykel: $(4-1)!\binom{5}{4} = 30$

Elemente vom Zerlegungstyp (3,2):

Jedes solche Elt. ist durch den 3-Zykel schon festgelegt. $\Rightarrow$ Anzahl 20

Weitere Ergänzungen

- Man kann auch Formeln für die Anzahl der Elemente eines beliebigen Zerlegungstyps angeben (siehe Skript).
- Im Skript wird auch ausgeführt, wie man die Klassengleichungen der alternierenden Gruppen A_n bestimmt.
- Desweiteren kann aus der Klassengleichung die Einfachheit der alternierenden Gruppen für $n \geq 5$ abgeleitet werden.

Beweis der Einfachheit der Gruppe A_5

1. Schritt: Aufstellen der Klassengleichung

Allgemein gilt: Jede S_n-Konjugation, die in A_n liegt, ist entweder auch A_n-Konjugationsklasse, oder sie zerfällt in zwei gleich große A_n-Konjugationsklassen (siehe Skript).

Die S_5-Konjugationsklassen, die in A_5 liegen, sind
- die 20-elementige Klasse der 3-Zykel
- die 24-elementige Klasse der 5-Zykel
- die 15-elementige Klasse der Doppeltr.
- die einelementige Klasse $\{id\}$

Da 15 ungerade ist, können die Doppeltransp nicht in zwei gleich große Mengen zerfallen. Sie bilden also eine A_5-Konjugationsklasse.

Je zwei 3-Zykel $(a\,b\,c)$ und $(d\,e\,f)$ aus A_5 sind bereits in A_5 konjugiert, denn:

Da sie in S_5 konjugiert sind, existiert ein Element $\sigma \in S_5$ mit $\sigma \circ (a\,b\,c) \circ \sigma^{-1} = (d\,e\,f)$

1. <u>Fall</u>: $\sigma \in A_5 \Rightarrow$ 3-Zykel in A_5 konjugiert

2. <u>Fall</u>: $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$

Seien $u, v \in M_5$ die beiden Zahlen mit $u, v \notin \{d, e, f\}$.

Setze $\tau = (u\,v)$. $\Rightarrow \tau \circ (d\,e\,f) \circ \tau^{-1} = (d\,e\,f)$

$\Rightarrow (\tau \circ \sigma) \circ (a\,b\,c) \circ (\tau \circ \sigma)^{-1} = (d\,e\,f)$

Wegen $\operatorname{sgn}(\tau \circ \delta) = (-1)\cdot(-1) = 1$ gilt $\tau \circ \delta \in A_5$, d.h. auch in diesem Fall sind $(a\ b\ c)$, $(d\ e\ f)$ in A_5 konjugiert.

Die Klasse der 5-Zykel zerfällt tatsächlich in zwei 12-elementige A_5-Konjugationsklassen (Grund: Zum Beispiel sind $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ und $(1\ 2\ 3\ 5\ 4)$ in A_5 nicht konjugiert, siehe Skript.)

Ergebnis: Die Klassengleichung der Gruppe A_5 lautet:

$$|A_5| = 60 = 1 + 15 + 20 + 12 + 12$$

2. Schritt:

Nachweis, dass kein Normalteiler $N \neq \{\mathrm{id}\}, A_5$ existiert

Angenommen, N ist ein solcher Normalteiler. Mit jedem Element $n \in N$ ist die gesamte Konjugationsklasse $[n]$ in N enthalten, denn wegen $N \trianglelefteq A_5$ gilt jeweils $gng^{-1} \in N$ für alle $g \in A_5$. Somit ist N Vereinigung von A_5-Konjugationsklassen; eine davon muss $\{\mathrm{id}\}$ sein, weil N auf jeden Fall das Neutralelement von A_5 enthält.

Weil ansonsten nur Klassen mit mindestens 12 Elementen zur Verfügung stehen, muss $|N| \geq 13$ gelten. Die einzigen echten Teiler von $|A_5|$ größer gleich 13 sind 15 und 30. Es muss also $|N| = 15$ oder $|N| = 30$ gelten.

Andererseits ist es unmöglich, durch Addition von einer oder mehrerer der Zahlen 12, 12, 15, 30 zu 1 den Wert 15 oder 30 zu erhalten. Also existiert kein nichttrivialer Normalteiler von A_5.