Definition (7.1)

Sei G eine Gruppe und X eine Menge. Eine Gruppenoperation von G auf X ist eine Abbildung $\alpha : G \times X \longrightarrow X$ mit den Eigenschaften

$$\alpha(e_G, x) = x \qquad \text{und} \qquad \alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(gh, x)$$

für alle $g, h \in G$ und $x \in X$, wobei e_G das Neutralelement der Gruppe bezeichnet.

An Stelle von $\alpha(g, x)$ verwendet man häufig auch die Infix-Schreibweise $g \cdot x$, wobei dann $\cdot$ das Symbol für die Gruppenoperation ist.

Die Bahnen einer Gruppenoperation

Definition (7.2)

Sei G eine Gruppe, X eine Menge und $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$ eine Gruppenoperation.

(i) Für jedes $x \in X$ nennt man $G(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ die Bahn von x.

(ii) Gibt es ein $x \in X$ mit $G(x) = X$, dann ist die Gruppenoperation transitiv.

(iii) Die Elemente $x \in X$ mit $G(x) = \{x\}$ heißen Fixpunkte der Gruppenoperation.

(iv) Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ wird als G-invariant bezeichnet, wenn für alle $g \in G$ und $y \in Y$ auch $g \cdot y \in Y$ gilt.

Zerlegung einer Menge in Bahnen

Proposition (7.3)

Sei G eine Gruppe, X eine Menge und $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$ eine Gruppenoperation. Dann gilt

(i) Die Menge $\mathcal{B} = \{G(x) \mid x \in X\}$ der Bahnen ist eine Zerlegung von X.

(ii) Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ ist genau dann G-invariant, wenn Y eine Vereinigung von Bahnen der Operation ist.

Der Stabilisator eines Elements

Satz (7.4)

Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert, und $x \in X$. Dann ist die Teilmenge $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ eine Untergruppe von G. Man nennt sie den Stabilisator von x.

Beweis von Satz 7.4

geg: Operation $\circ$ einer Gruppe G auf einer Menge X
$x \in X$

<u>Beh.</u>: $G_x = \{ g \in G \mid g \circ x = x \}$ ist eine Untergruppe von G

zu überprüfen (i) $e \in G_x$ (ii) $\forall g, h \in G_x : gh, g^{-1} \in G_x$

<u>zu (i)</u> Nach Def. der Gruppenop. gilt $e \circ x = x$. $\Rightarrow e \in G_x$

<u>zu (ii)</u> Seien $g, h \in G_x$. $\Rightarrow g \circ x = x$, $h \circ x = x$

$$(gh) \circ x = g \circ (h \circ x) = g \circ x = x \Rightarrow gh \in G_x$$

$$g^{-1} \circ x = g^{-1} \circ (g \circ x) = (g^{-1} g) \circ x = e \circ x = x$$

$$\Rightarrow g^{-1} \in G_x$$

$\square$

Beispiele für Stabilisatoren

(i) $G = S_4$, betrachte die Op von G auf $M_4 = \{1, 2, 3, 4\}$

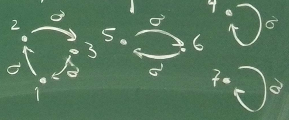
$\Rightarrow G_4 = \{ id, (12), (13), (23), \underset{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}}{\underset{\|}{(123)}}, (132) \} \cong S_3$

$G_3 = \{ id, (12), (14), (24), (124), (142) \} \cong S_3$

(ii) $G = GL_2(\mathbb{R})$, betrachte die Operation von G auf $\mathbb{R}^2$

$x = e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow G_x = \left\{ \begin{pmatrix}1 & a\\0 & b\end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0 \right\}$

(iii) $G = \langle \sigma \rangle \subseteq S_7$, $\sigma = \langle (123)(56) \rangle$



$G_4 = G_7 = \langle \sigma \rangle = G$ (Ordn. 6)

$G_5 = G_6 = \langle \sigma^2 \rangle$ (Ordn. 3)

$G_1 = G_2 = G_3 = \langle \sigma^3 \rangle$ (Ordn. 2)

Stabilisatoren in der symmetrischen Gruppe

Proposition (7.5)

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Wie wir bereits festgestellt haben, existiert eine natürliche Gruppenoperation der symmetrischen Gruppe S_n auf der Menge M_n. Der Stabilisator $(S_n)_n$ ist eine zu S_{n-1} isomorphe Untergruppe von S_n.

Ebenso kann man zeigen, dass der Stabilisator $(S_n)_k$ für $1 \leq k < n$ isomorph zu S_{n-1} ist. Insgesamt sind in S_n also n zu S_{n-1} isomorphe Untergruppen enthalten.

Bahnlänge und Ordnung des Stabilsators

Satz (7.6)

Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert, und sei $x \in X$. Dann gibt es eine Bijektion

$$\phi_x : G/G_x \to G(x)$$

mit $\phi_x(gG_x) = g \cdot x$ für alle $g \in G$. Ist insbesondere X endlich, dann ist auch der Index $(G : G_x)$ endlich, und es gilt $(G : G_x) = |G(x)|$.

Beweis von Satz 7.6:

geg: Operation einer Gruppe G auf einer Menge X, $x \in X$

z.zg: Es gibt eine Bijektion $\phi_x : G/G_x \to G(x)$ mit $\phi(gG_x) = g \circ x \;\; \forall g \in G$

Existenz der Abbildung:

Wende Satz 4.25 auf die Äquivalenzrel.

$g \equiv_l h \iff h \in gG_x \quad (g, h \in G)$

und auf die Abb. $\hat{\phi}_x : G \to G(x),\ g \mapsto g \circ x$

an. zu überprüfen: Für alle $g, h \in G$ mit $g \equiv_l h$ gilt $\hat{\phi}_x(g) = \hat{\phi}_x(h)$.

Seien also $g, h \in G_x$ mit $g \equiv_l h$ vorgeg. Dann gilt $h \in gG_x \Rightarrow \exists\, g_1 \in G_x$ mit $h = gg_1$. Es folgt $\hat{\phi}_x(h) = \hat{\phi}_x(gg_1) = (gg_1)\cdot x = g\cdot(g_1\cdot x)$

$$= \underset{g_1 \in G_x}{g\cdot x} = \hat{\phi}_x(g).$$

Surjektivität von ϕ_x:

Sei $y \in G(x) \Rightarrow \exists\, g \in G:\ g\cdot x = y$

$\Rightarrow \phi_x(gG_x) = g\cdot x = y$

Injektivität: Seien $g, h \in G$ mit

$\phi(gG_x) = \phi(hG_x)$. zzg: $gG_x = hG_x$

$\phi(gG_x) = \phi(hG_x) \Rightarrow g\cdot x = h\cdot x \longrightarrow$

$(h^{-1}g)\cdot x = h^{-1}\cdot(g\cdot x) = h^{-1}\cdot(h\cdot x) = (h^{-1}h)\cdot x$

$= e \cdot x = x \Rightarrow h^{-1} g \in G_x \Rightarrow \exists g_1 \in G :$

$h^{-1} g = g_1 \Rightarrow g = h g_1 \Rightarrow g \in h G_x \Rightarrow g G_x = h G_x$

$\square$

$)$

$(h^{-1} h) \cdot x$

Beispiele für Gruppenoperationen

Definition (7.7)

Sei G eine Gruppe und $\mathcal{U}$ die Menge ihrer Untergruppen.

(i) Die Operation von G auf der Menge ihrer Elemente gegeben durch $g \cdot h = gh$ bezeichnet man als Operation durch Linkstranslation.

(ii) Die Operation von G auf der Menge ihrer Elemente gegeben durch $g \cdot h = ghg^{-1}$ wird Operation durch Konjugation genannt.

(iii) Die Operation von G auf $\mathcal{U}$ gegeben durch $g \cdot U = gUg^{-1}$ wird ebenfalls als Operation durch Konjugation bezeichnet.

Nachweis, dass die Operation durch Konjugation tatsächlich eine Gruppenoperation ist:

Seien $g_1, g_2, h \in G$. Dann gilt

$e \cdot h = ehe^{-1} = ehe = h$ und

$g_1 \cdot (g_2 \cdot h) = g_1 \cdot (g_2 h g_2^{-1}) = g_1 (g_2 h g_2^{-1}) g_1^{-1}$

$= (g_1 g_2) h (g_2^{-1} g_1^{-1}) = (g_1 g_2) h (g_1 g_2)^{-1} =$

$(g_1 g_2) \cdot h$

Gruppenoperationen und Homomorphismen nach $\mathrm{Per}(X)$

Satz (7.8)

Sei G eine Gruppe und X eine Menge.

(i) Ist $\alpha : G \times X \to X$ eine Gruppenoperation, dann kann jedem $g \in G$ durch $\tau_g(x) = \alpha(g, x)$ ein Element aus $\mathrm{Per}(X)$ zugeordnet werden. Die Abbildung $G \to \mathrm{Per}(X)$, $g \mapsto \tau_g$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

(ii) Sei umgekehrt $\phi : G \to \mathrm{Per}(X)$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist durch $\alpha : G \times X \to X$ mit $\alpha(g, x) = \phi(g)(x)$ eine Gruppenoperation gegeben.

Beweis von Satz 7.8

geg: Gruppe G, Menge X

<u>zu (i)</u> Sei $\alpha : G \times X \to X$ eine Gruppenop. überprüfe:

(1) Für jedes $g \in G$ ist $\tau_g : X \to X$, $x \mapsto \alpha(g, x)$ bijektiv (d.h. $\tau_g \in \mathrm{Per}(X)$ $\forall g \in G$).

(2) Die Abb. $\phi : G \to \mathrm{Per}(X)$, $g \mapsto \tau_g$ ist ein Homomorphismus von Gruppen.

<u>zu (1)</u> Sei $g \in G$. überprüfe: $\tau_{g^{-1}}$ ist Umkehrabb. von τ_g

Für jedes $x \in X$ gilt $(\tau_{g^{-1}} \circ \tau_g)(x) = \tau_{g^{-1}}(\alpha(g, x))$
$= \alpha(g^{-1}, \alpha(g, x)) = \alpha(g^{-1}g, x) = \alpha(e, x) = x = \mathrm{id}_X(x)$.

Daraus folgt $\tau_{g^{-1}} \circ \tau_g = \mathrm{id}_X$. Ebenso überprüft man

$\tau_g \circ \tau_{g^{-1}} = id_X \Rightarrow \tau_g, \tau_{g^{-1}}$ sind zueinander invers $\Rightarrow \tau_g$ ist bijektiv

<u>zu (2)</u> Seien $g, h \in G$. z.zg: $\phi(gh) = \phi(g) \circ \phi(h)$, gleichbedeutend damit: $\tau_{gh} = \tau_g \circ \tau_h$

Tatsächlich gilt für jedes $x \in X$ jeweils $(\tau_g \circ \tau_h)(x) = \tau_g(\alpha(h,x))$
$= \alpha(g, \alpha(h,x)) = \alpha(gh, x) = \tau_{gh}(x)$

<u>zu (ii)</u> Sei $\phi: G \to Per(X)$ ein Gruppenhom. z.zg: Durch
$\alpha: G \times X \to X \quad (g,h) \mapsto \phi(g)(x)$ ist eine Operation von G auf X definiert

Seien $g, h \in G$ und $x \in X$. z.zg: $\alpha(e,x) = x$, $\alpha(gh,x) = \alpha(g, \alpha(h,x))$

Tatsächlich gilt $\alpha(e,x) = \phi(e)(x) \overset{\phi \text{ Hom.}}{=} id_X(x) = x$ und
$\alpha(gh)(x) = \phi(gh)(x) \overset{\phi \text{ Hom.}}{=} (\phi(g) \circ \phi(h))(x) = \phi(g)(\phi(h)(x))$
$= \phi(g)(\alpha(h,x)) = \alpha(g, \alpha(h,x))$. $\square$

Der Satz von Cayley

Satz (7.9)

Sei G eine Gruppe der Ordnung $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es einen Monomorphismus $G \to S_n$. Mit anderen Worten, G ist isomorph zu einer Untergruppe von S_n.

wichtiges Nebenergebnis des Beweises:

Operiert eine Gruppe G auf einer n-elementigen Mengen ($n \in \mathbb{N}$), dann liefert diese Operation auf natürliche Weise einen Homomorphismus $G \to S_n$.

Beweis von Satz 7.9

geg: $n \in \mathbb{N}$, G Gruppe der Ordn. n

z.zg: Es gibt einen inj. Hom $\phi : G \to S_n$.

Betrachte die Operation von G auf sich selbst durch Linkstranslation, d.h. geg durch $g \circ h = gh \quad \forall g, h \in G$.

Nach Satz 7.8 erhält man einen Hom $\psi : G \to \mathrm{Per}(G)$ durch $\psi(g)(h) = g \circ h$ $\forall g, h \in G$. <u>Beh.</u>: ψ ist injektiv

z.zg: $\ker(\psi) \subseteq \{e\}$. Sei also $g \in \ker(\psi)$.

Dann gilt $\Psi(g) = id_G \Rightarrow \Psi(g)(e) =$
$id_G(e) = e. \Rightarrow g \cdot e = e \Rightarrow ge = e$
$\Rightarrow g = e \Rightarrow g \in \{e\}$ ($\Rightarrow$ Beh.)

Wegen $|G| = n$ sind die Gruppen $Per(G)$ und $Per(M_n) = S_n$ isomorph. Sei $\iota : Per(G) \to S_n$ ein Isom. Dann ist $\phi = \iota \circ \Psi$ ein injektiver Gruppenhom. $G \to S_n$.

$\square$

Anwendung auf die Platonischen Körper

- Die Operation der Tetraedergruppe $\mathbb{T}$ auf der 4-elementigen Menge der Ecken des Tetraeders definiert einen Homomorphismus $\phi : \mathbb{T} \to S_4$. Ein Element der Tetraedergruppe, das alle Ecken festhält, muss mit $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ übereinstimmen. Somit ist der Homomorphismus injektiv.
- Die Gruppe $\mathbb{T}^+$ enthält genau 12 Elemente. Neben $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ sind dies 8 Drehungen (um 120° und 240°) um Achsen durch eine Ecke und eine gegenüberliegende Seite sowie 3 Drehungen (um 180°) um Achsen durch die Mitten gegenüberliegender Kanten.
- Der Homomorphiesatz, angewendet auf die Determinantenabbildung, liefert einen Isomorphismus $\mathbb{T}/\mathbb{T}^+ \cong \{\pm 1\}$. Es gilt also $(\mathbb{T} : \mathbb{T}^+) = 2$ und $|\mathbb{T}| = 2 \cdot |\mathbb{T}^+| = 2 \cdot 12 = 24$. Also ist $\mathbb{T}$ isomorph zu einer 24-elementigen Untergruppe von S_4, und wegen $|S_4| = 24$ folgt daraus $\mathbb{T} \cong S_4$.

Anwendung auf die Platonischen Körper (Forts.)

- Identifiziert man die Ecken des Tetraeders mit $M_4 = \{1, 2, 3, 4\}$, dann entsprechen die Elemente von $\mathbb{T}^+$ neben id den 3-Zykeln und den Doppeltranspositionen in S_4. Damit erhält man $\mathbb{T}^+ \cong A_4$.
- Die orientierungserhaltende Symmetriegruppe $\mathbb{W}^+$ des Würfels operiert auf der vierelementigen Menge der Diagonalen, die je zwei gegenüberliegende Ecken des Würfels verbinden. Dadurch erhält man einen Homomorphismus $\psi : \mathbb{W}^+ \to S_4$.
- Eine Drehung, die alle Diagonalen festhält, stimmt mit $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ überein; deshalb ist ψ injektiv. Die Gruppe $\mathbb{W}^+$ besteht aus 24 Elementen. Neben $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ sind dies 8 Drehungen um diese Diagonalen, 6 Drehungen um Achsen durch die Mitten gegenüberliegender Kanten, und 9 Drehungen um Achsen gegenüberliegender Seiten. Daraus kann wie beim Tetraeder geschlossen werden, dass $\mathbb{W}^+$ isomorph zu S_4 ist.

Anwendung auf die Platonischen Körper (Forts.)

- Die volle Symmetriegruppe $\mathbb{W}$ ist ein inneres direktes Produkt von $\mathbb{W}^+$ und der zweielementigen Gruppe erzeugt von der Punktspiegelung am Koordinatenursprung, gegeben durch das Negative $-E_3$ der Einheitsmatrix. Daraus ergibt sich ein Isomorphismus $\mathbb{W} \cong S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- Der Ikosaeder enthält fünf verschiedene zueinander kongruente regelmäßige Oktaeder, deren Ecken mit Ecken des Ikosaders übereinstimmen. Die Gruppe des Ikosaeders operiert auf diesen Oktaedern. Dies liefert einen Homomorphismus der orientierungserhaltenden Ikosaedergruppe $\mathbb{I}^+$ nach S_5.

Anwendung auf die Platonischen Körper (Forts.)

- Die Gruppe $\mathbb{I}^+$ besteht aus 60 Elementen, und anhand der Klassengleichung (siehe unten) kann man zeigen, dass $\mathbb{I}^+$ eine einfache Gruppe ist. Daraus kann gefolgert werden, dass φ injektiv ist und das Bild mit der alternierenden Gruppe A_5 übereinstimmt. Es gilt also $\mathbb{I}^+ \cong A_5$.
- Wie beim Würfel zeigt man, dass für die volle Symmetriegruppe $\mathbb{I} \cong A_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gilt.