Das äußere semidirekte Produkt

Satz (6.3)

Seien U und N Gruppen und $\phi : U \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Homomorphismus. Wir definieren auf $N \times U$ eine Verknüpfung $*$ durch

$$(n_1, u_1) * (n_2, u_2) \quad = \quad (n_1 \phi(u_1)(n_2), u_1 u_2)$$

für $(n_1, u_1), (n_2, u_2) \in N \times U$. Dann ist $(N \times U, *)$ eine Gruppe. Man nennt sie das äußere semidirekte Produkt von N und U und bezeichnet sie mit $N \rtimes_\phi U$.

Inneres und äußeres semidirektes Produkt

Satz (6.4)

Sei G eine Gruppe, U eine Untergruppe und N ein Normalteiler von G. Wir setzen voraus, dass G das innere semidirekte Produkt N und U ist. Definieren wir $\phi : U \to \mathrm{Aut}(N)$ wie in Proposition 6.1, dann ist durch $(n, u) \mapsto nu$ ein Isomorphismus $N \rtimes_\phi U \cong G$ definiert.

Die Diedergruppen als semidirektes Produkt

Proposition (6.5)

Für jedes $n \geq 3$ ist die Diedergruppe D_n ein inneres semidirektes Produkt des Normalteilers $N = \langle \rho_n \rangle$ und der Untergruppe $U = \langle \tau \rangle$. Somit ist D_n isomorph zu einem äußeren semidirekten Produkt von zyklischen Gruppen der Ordnung n bzw. 2.

Definition der Kommutatorgruppe

Definition (6.6)

Sei G eine Gruppe. Für beliebige $g, h \in G$ bezeichnet man das Element $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ als den Kommutator von g und h. Bezeichnet $S = \{[g, h] \mid g, h \in G\}$ die Menge aller Kommutoren in G, so wird die Untergruppe $G' = \langle S \rangle$ die Kommutatorgruppe von G genannt.

Für alle $g, h \in G$ gilt jeweils

$$gh = [g, h]hg.$$

Die Bedeutung der Kommutatorgruppe

,

Satz (6.7)

Sei G eine Gruppe.

(i) Die Kommutatorgruppe G' ist ein Normalteiler von G.

(ii) Für einen beliebigen Normalteiler N von G gilt $N \supseteq G'$ genau dann, wenn die Faktorgruppe G/N abelsch ist.

Also ist G/G' die größte abelsche Faktorgruppe von G.

Beweis von Satz 6.7

geg: Gruppe G $\quad S = \{ [g,h] \mid g,h \in G \}$

wobei $[g,h] = g h g^{-1} h^{-1} \ \forall g,h \in G$

$G' = \langle S \rangle$ Kommutatorgruppe von G

zu (i) z. zg: $G' \trianglelefteq G$ $\quad$ Sei $g \in G$. zu überprüfen:

$g \langle S \rangle g^{-1} \subseteq \langle S \rangle$ Dies folgt aus $\langle S \rangle \subseteq g^{-1} \langle S \rangle g$,

denn: Sei $h \in g \langle S \rangle g^{-1} \Rightarrow \exists k \in \langle S \rangle$ mit $h = g k g^{-1}$

Laut Annahme liegt k in $g^{-1} \langle S \rangle g \Rightarrow \exists k' \in \langle S \rangle$ mit

$k = g^{-1} k' g$. einsetzen $\Rightarrow h = g (g^{-1} k' g) g^{-1} = k' \in \langle S \rangle$

Weil $g^{-1} \langle S \rangle g$ eine Untergruppe von G ist (das Bild von

$\langle S\rangle$ unter dem Automorphismus geg. durch Konjugation mit g^{-1}),
folgt $\langle S\rangle \subseteq g^{-1}\langle S\rangle g$ bereits aus der Inklusion

$$S \subseteq g^{-1}\langle S\rangle g \qquad (*)$$

Es genügt also, $(*)$ zu überprüfen. Seien $g_0, h_0 \in G$ vorgeg.,
z.zg. ist $[g_0, h_0] \in g^{-1}\langle S\rangle g$

$$[g_0, h_0] = g_0 h_0 g_0^{-1} h_0^{-1} = g^{-1} g\, g_0 h_0 g_0^{-1} h_0^{-1} g^{-1} g =$$

$$g^{-1}\left((g g_0 g^{-1})(g h_0 g^{-1})(g g_0^{-1} g^{-1})(g h_0^{-1} g^{-1})\right) g =$$

$$g^{-1}\left((g g_0 g^{-1})(g h_0 g^{-1})(g g_0 g^{-1})^{-1}(g h_0 g^{-1})^{-1}\right) g =$$

$$g^{-1}[g g_0 g^{-1}, g h_0 g^{-1}]\, g \in g^{-1} S g \subseteq g^{-1}\langle S\rangle g$$

zu (ii) Sei $N \trianglelefteq G$. zu zeigen:

G/N ist abelsch $\Longleftrightarrow$ $N \supseteq G'$

„$\Leftarrow$" Seien $g, h \in G$. z.zg: $gN \cdot hN = hN \cdot gN$

äquivalent dazu: $ghN = hgN$ bzw.

$(ghN) \cdot (hgN)^{-1} = e_{G/N}$ bzw. $(ghN) \cdot ((hg)^{-1}N) =$

$e_{G/N}$. Das Element auf der linken Seite ist

gleich $(ghN)(g^{-1}h^{-1}N) = ghg^{-1}h^{-1}N$

$= [g,h]N$. Die zu zeigende Gleichung ist also

äquivalent zu $[g,h]N = e_{G/N} = N$, und somit

auch zu $[g,h] \in N$. Aber dies folgt wegen

$[g,h] \in S \subseteq G'$ aus der Voraussetzung $G' \subseteq N$.

„$\Rightarrow$" Wegen $G' = \langle S \rangle$ genügt es, $S \subseteq N$ zu zeigen. Seien $g, h \in G$, z.zg.: $[g,h] \in N$. Da G/N abelsch ist, gilt $gN \cdot hN = hN \cdot gN$. Wie oben gezeigt, ist diese Gleichung äquivalent zu $[g,h] \in N$. $\square$

Höhere Kommutatorgruppen und Auflösbarkeit

Man definiert rekursiv

- $G^{(0)} = G$
- $G^{(n+1)} = (G^{(n)})'$ für $n \in \mathbb{N}_0$

Die Untergruppen $G^{(n)}$ mit $n \geq 2$ werden die höheren Kommutatorgruppen von G genannt. Es gilt jeweils $G^{(n+1)} \trianglelefteq G^{(n)}$, und die Faktorgruppe $G^{(n)}/G^{(n+1)}$ ist abelsch.

Definition (6.8)

Eine Gruppe G wird auflösbar genannt, wenn $G^{(n)} = \{e\}$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Jede abelsche Gruppe G ist auflösbar, wegen $G^{(1)} = \{e\}$.

Definition der Subnormalreihen

Definition (6.9)

Eine Subnormalreihe für eine Gruppe G ist eine Folge von Untergruppen der Form

$$G = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \ldots \supseteq N_r = \{e\}$$

mit $r \in \mathbb{N}_0$, wobei für $0 \leq k < r$ jeweils $N_{k+1} \trianglelefteq N_k$ gilt. Die Faktorgruppen N_k/N_{k+1} bezeichnet man als Faktoren der Subnormalreihe. Sind alle Faktoren abelsch, dann spricht man von einer abelschen Subnormalreihe.

Proposition (6.10)

Jede endliche abelsche Gruppe besitzt eine Subnormalreihe mit zyklischen Faktoren von Primzahlordnung.

Beweis von Proposition 6.10:

geg: endliche abelsche Gruppe G

z.zg.: Es gibt eine Subnormalreihe

$G = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \ldots \supseteq N_r = \{e\}$, wobei

N_k / N_{k+1} jeweils zyklisch von Primzahlordnung ist,

für $0 \leq k < r$.

Beweis durch vollst. Ind. über $|G|$:

Ind.-Anf.: $|G| = 1$ nichts zu zeigen

(Man kann $r = 0$, $G_0 = G$ setzen.)

Ind-Schritt: Sei $n = |G| > 1$, setze die Aussage für abelsche Gruppen kleinerer Ordnung voraus.

Auf Grund des Hauptsatzes über endliche abelsche

Gruppen (siehe §5) können wir annehmen, dass G die Form $C_1 \times \ldots \times C_s$ hat, mit zyklischen Gruppen C_j, $|C_j| > 1$ für $1 \leq j \leq s$. Sei p ein Primteiler von $m = |C_s|$, und sei $g \in C_s$ mit $C_s = \langle g \rangle$.

Setze $U = \langle g^p \rangle$ und $N_1 = C_1 \times \ldots \times C_{s-1} \times U$.

klar: $N_1 \leq G$, darüber hinaus $N_1 \trianglelefteq G$, weil G abelsch ist.

p teilt $\mathrm{ord}(g) \overset{\S 3}{\Longrightarrow} \mathrm{ord}(g^p) = \frac{1}{p}\mathrm{ord}(g) = \frac{m}{p}$

also: $|G| = \prod_{j=1}^{s} |C_j| = \prod_{j=1}^{s-1} |C_j| \cdot m$ und

$|N_1| = \prod_{j=1}^{s-1} |C_j| \cdot |U| = \prod_{j=1}^{s-1} |C_j| \cdot \frac{m}{p} < |G|$

Die Ind-Voraussetzung, angewendet auf N_1, liefert eine Subnormalreihe $N_1 \trianglerighteq N_2 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq N_r = \{e\}$, wobei N_k / N_{k+1} zyklisch von Primzahlordnung für $1 \leq k < r$ ist.

st ,

Setze $N_0 = G$. s.o. $N_1 \trianglelefteq N_0$ außerdem:

$$|N_0/N_1| = \frac{|N_0|}{|N_1|} = \frac{\prod_{j=1}^{s-1} |K_j| \cdot m}{\prod_{j=1}^{s-1} |K_j| \cdot \frac{m}{p}} = p$$

Also ist N_0/N_1 von Primzahlordnung und damit auch zyklisch. Insgesamt ist also $G = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \dots \supseteq N_r = \{e\}$ eine Subnormalreihe mit der angeg. Eigenschaft. $\square$

ssage

aus.

abelsche

Auflösbarkeit und Subnormalreihen

Satz (6.11)

Für eine endliche Gruppe G sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.

(i) Die Gruppe G ist auflösbar.

(ii) Sie besitzt eine abelsche Subnormalreihe.

(iii) Sie hat eine Subnormalreihe mit zyklischen Faktoren von Primzahlordnung.

Dabei ist die Äquivalenz „(i) $\Leftrightarrow$ (ii)“ auch für unendliche Gruppen gültig.

Beweis von Satz 6.11, zunächst nur „(i) $\Leftrightarrow$ (ii)"

„$\Rightarrow$" Beh: Die höheren Kommutatorgruppen $G^{(k)}$ von G bilden eine abelsche Subnormalreihe.

- Nach Vor. ist G auflösbar, d.h. es gilt $G^{(r)} = \{e\}$ für ein $r \in \mathbb{N}_0$. Außerdem gilt $G^{(k+1)} = (G^{(k)})' \leq G^{(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, nach Def. der Kommutatorgruppen. insgesamt also: $G = G^{(0)} \supseteq G^{(1)} \supseteq \ldots \supseteq G^{(r)} = \{e\}$
- bereits festgestellt: $G^{(k+1)} \trianglelefteq G^{(k)}$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$, und $G^{(k)}/G^{(k+1)}$ ist jeweils abelsch. ($\Rightarrow$ Beh.)

„$\Leftarrow$" Nach Voraussetzung existiert eine abelsche Subnormalreihe $G = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \dots \supseteq N_r = \{e\}$ $(r \in \mathbb{N}_0)$, d.h. es gilt jeweils $N_{k+1} \trianglelefteq N_k$ und N_k / N_{k+1} ist abelsch für $0 \leq k < r$. z.zg.: G ist auflösbar

Beh.: $G^{(k)} \subseteq N_k$ für $0 \leq k \leq r$ (Daraus folgt $G^{(r)} \subseteq N_r = \{e\}$, also $G^{(r)} = \{e\}$, und somit ist G auflösbar.)

Beweis der Beh. durch vollst. Induktion über k.

Ind-Anf.: Es gilt $G^{(0)} = G = N_0$.

Ind-Schritt: Sei $k \in \{1, \dots, r\}$, setze die Aussage für alle $l < k$ voraus. z.zg. $G^{(k)} \subseteq N_k$. Ind-Vor. $\Rightarrow G^{(k-1)} \subseteq N_{k-1}$

N_{k-1}/N_k ist abelsch $\xRightarrow{\text{Satz 6.7 (ii)}}$ $N_k \supseteq N_{k-1}'$. Aus $N_{k-1} \supseteq G^{(k-1)}$

folgt $N_{k-1}' \supseteq \left(G^{(k-1)}\right)' = G^{(k)}$ insgesamt:

$N_k \supseteq N_{k-1}' \supseteq G^{(k)}$ $\square$

Die

erwei

$N_k /$

Beweis von Satz 6.11 (Abschluss)

„(iii) $\Rightarrow$ (ii)" offensichtlich, da jede zyklische Gruppe abelsch ist

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Voraussetzung: Die endliche Gruppe hat eine abelsche Subnormalreihe $G = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \dots \supseteq N_r = \{e\}$

z.zg.: Es gibt eine Subnormalreihe mit zyklischen Faktoren von Primzahlordnung.

Sei $k \in \{0, \dots, r-1\}$. Es gilt $N_{k+1} \trianglelefteq N_k$, und $\bar{G} = N_k / N_{k+1}$ ist eine endliche abelsche Gruppe. Proposition 6.10 $\Rightarrow$ $\bar{G}$ hat eine Subnormalreihe $\bar{G} = \bar{U}_0 \supseteq \bar{U}_1 \supseteq \dots \supseteq \bar{U}_s = \{e_{\bar{G}}\}$, wobei $\bar{U}_j / \bar{U}_{j+1}$ zyklisch von Primzahlordnung, für $0 \leq j < s$.

Sei $\pi: N_k \to \bar{G}$ der kanonische Epimorphismus. Setze

$U_j = \pi^{-1}(\bar{U}_j)$ für $0 \leq j \leq s$. Laut Korrespondenzsatz (§4) gilt $N_k = U_0 \supseteq U_1 \supseteq \ldots \supseteq U_s = N_{k+1}$, außerdem:

$(N_k : U_j) = (\bar{G} : \bar{U}_j)$ für $0 \leq j \leq s$, und somit auch

$$(U_j : U_{j+1}) = \frac{|U_j|}{|U_{j+1}|} = \frac{\frac{|N_k|}{(N_k : U_j)}}{\frac{|N_k|}{(N_k : U_{j+1})}} = \frac{(N_k : U_{j+1})}{(N_k : U_j)} \overset{\text{Korrespondenzsatz}}{=} \frac{(\bar{G} : \bar{U}_{j+1})}{(\bar{G} : \bar{U}_j)}$$

$$= \frac{|\bar{U}_j|}{|\bar{U}_{j+1}|} = (\bar{U}_j : \bar{U}_{j+1})$$

Da $(\bar{U}_j : \bar{U}_{j+1})$ eine Primzahl ist, gilt dasselbe für $(U_j : U_{j+1})$, d.h. U_j / U_{j+1} ist zyklisch von Primzahlordnung. Damit ist insgesamt gezeigt, dass die abelsche Subnormalreihe zu einer Subnormalreihe mit zyklischen Faktoren von Primzahlordnung erweitert werden kann. $\square$

Anmerkung zum Beweis

An der Tafel habe ich Teil (iii) des Korrespondenzsatzes (Satz 4.31) verwendet, um zu zeigen, dass die Faktorgruppe U_j/U_{j+1} ebenso wie $\bar{U}_j/\bar{U}_{j+1}$ eine zyklische Primzahlordnung ist. Einfacher ist es aber, wie im Skript Teil (ii) der Isomorphiesätze (Satz 4.32) zu verwenden, weil man auf diese Weise direkt $U_j/U_{j+1} \cong \bar{U}_j/\bar{U}_{j+1}$ erhält und sich die Rechnung mit den Gruppenindizes sparen kann.