Proposition (6.1)

Sei G eine Gruppe, N ein Normalteiler und U eine Untergruppe von G. Dann ist jedem $u \in U$ durch $\tau_u(n) = unu^{-1}$ ein Automorphismus von N zugeordnet. Die Abbildung

$$\phi : U \to \mathrm{Aut}(N), \quad u \mapsto \tau_u$$

ist ein Homomorphismus von Gruppen.

Beweis von Proposition 6.1

geg: Gruppe G, $U \le G$, $N \trianglelefteq G$

Beh.: (i) Für jedes $u \in U$ ist $\tau_u : N \to G$, $n \mapsto unu^{-1}$ eine Abbildung $N \to N$.

(ii) Für jedes $u \in U$ gilt $\tau_u \in \mathrm{Aut}(N)$

(iii) Die Abbildung $\phi : U \to \mathrm{Aut}(N)$, $u \mapsto \tau_u$ ist ein Homomorphismus.

Sei $u \in U$. zu (i) Wegen $N \trianglelefteq G$ gilt $gng^{-1} \in N$ $\forall g \in G, n \in N$

Insb. gilt $unu^{-1} \in N$ $\forall n \in N$.

zu (ii) Nachweis der Hom.-eigenschaft: Seien $n_1, n_2 \in N$.

$\tau_u(n_1 n_2) = u n_1 n_2 u^{-1} = u n_1 e n_2 u^{-1} = u n_1 u^{-1} u n_2 u^{-1}$
$= \tau_u(n_1) \tau_z(n_2)$ Für die Bijektivität überprüfe $\tau_{u^{-1}} \circ \tau_u = id_N$, $\tau_u \circ \tau_{u^{-1}} = id_N$ (Abbildungen mit einer Umkehrabbildung sind bijektiv.) Sei $n \in N$. Dann gilt $(\tau_u^{-1} \circ \tau_u)(n) = \tau_{u^{-1}}(unu^{-1})$
$= u^{-1}(unu^{-1})(u^{-1})^{-1} = u^{-1}unu^{-1}u = ene = n \Rightarrow \tau_u^{-1} \circ \tau_u = id_N$
Der Nachweis der zweiten Gleichung läuft analog.

zu (iii) Seien $u_1, u_2 \in U$. z.zg. $\phi(u_1 u_2) = \phi(u_1) \circ \phi(u_2)$
gleichbedeutend: $\tau_{u_1 u_2} = \tau_{u_1} \circ \tau_{u_2}$ Sei $n \in N$. z.zg.: $\tau_{u_1 u_2}(n) = (\tau_{u_1} \circ \tau_{u_2})(n)$
$\tau_{u_1 u_2}(n) = u_1 u_2 n (u_1 u_2)^{-1} = u_1 u_2 n u_2^{-1} u_1^{-1} = u_1 \tau_{u_2}(n) u_1^{-1} = \tau_{u_1}(\tau_{u_2}(n))$
$= (\tau_{u_1} \circ \tau_{u_2})(n)$ $\square$

Innere semidirekte und direkte Produkte

Proposition (6.2)

Sei G eine Gruppe und inneres semidirektes Produkt von $N \trianglelefteq G$ und $U \leq G$. Unter diesen Voraussetzungen ist G genau dann ein inneres direktes Produkt von N und U, wenn $\phi(u) = \mathrm{id}_N$ für alle $u \in U$ gilt, wobei ϕ den Homomorphismus aus Proposition 6.1 bezeichnet.

Beweis von Prop. 6.2:

geg.: Gruppe G, $U \leq G$, $N \trianglelefteq G$

wie in Prop. 6.1: $\phi: U \to \mathrm{Aut}(N)$, $u \mapsto \tau_u$

wobei $\tau_u(n) = unu^{-1}$ $\forall u \in U, n \in N$

Voraussetzung: G ist inneres semidirektes Produkt von N und U, d.h. es gilt

$N \cap U = \{e\}$, $NU = G$

<u>Beh.</u>: G ist inneres <u>direktes</u> Produkt von N und U $\iff$ $\phi(u) = \mathrm{id}_N$ $\forall u \in U$

zu zeigen: $U \trianglelefteq G \iff \phi(u) = \mathrm{id}_N$ $\forall u \in U$

„$\Leftarrow$": Vor. $\Rightarrow$ $\tau_u = \mathrm{id}_N$ $\forall u \in U$ $\Rightarrow$

$\tau_u(n) = id_N(n) \ \forall u \in U, n \in N \iff$

$unu^{-1} = n \ \forall u \in U, n \in N \iff$

$un = nu \ \forall u \in U, n \in N \quad (*)$

Sei nun $u \in U$ und $g \in G$ z.zg.: $gug^{-1} \in U$

$G = NU \Rightarrow \exists n_1 \in N, u_1 \in U$ mit $g = n_1 u_1$

$\Rightarrow gug^{-1} = n_1 u_1 u (n_1 u_1)^{-1} = n_1 u_1 u u_1^{-1} n_1^{-1}$

$\overset{(*)}{=} n_1 n_1^{-1} u_1 u u_1^{-1} = u_1 u u_1^{-1} \in U$

angewendet auf n_1^{-1} und $u_1 u u_1^{-1}$

"$\Rightarrow$" Vor. $\Rightarrow N \trianglelefteq G, U \trianglelefteq G$. Wie in §4 bei den direkten Produkten gezeigt, folgt daraus $nun^{-1}u^{-1} = e \ \forall n \in N, u \in U$

$\Rightarrow u n^{-1} u^{-1} = n^{-1} \; \forall n \in N \; \forall u \in U$

$\overset{(**)}{\Rightarrow} u n u^{-1} = n \quad \forall n \in N, \forall u \in U$ (**) weil mit n auch n^{-1} alle Elt. von N durchläuft

$\overset{s.o.}{\Rightarrow} \tau_u(n) = id_N(n) \; \forall n \in N, u \in U$

$\Rightarrow \tau_u = id_N \; \forall u \in U \Rightarrow \phi(u) = id_N \; \forall u \in U. \quad \square$

Das äußere semidirekte Produkt

Satz (6.3)

Seien U und N Gruppen und $\phi : U \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Homomorphismus. Wir definieren auf $N \times U$ eine Verknüpfung $*$ durch

$$(n_1, u_1) * (n_2, u_2) \quad = \quad (n_1 \phi(u_1)(n_2), u_1 u_2)$$

für $(n_1, u_1), (n_2, u_2) \in N \times U$. Dann ist $(N \times U, *)$ eine Gruppe. Man nennt sie das äußere semidirekte Produkt von N und U und bezeichnet sie mit $N \rtimes_\phi U$.

τ_u

N

...etes

...t

$...) = id_N$

$u \in U$

$\forall u \in U$

$\Rightarrow$

$$(n_1, u_1) * (n_2, u_2) = (n_1 \phi(u_1)(n_2), u_1 u_2)$$

Beweis von Satz 6.3

z.z.g. (i) $*$ ist assoziativ

(ii) Die Halbgruppe $(N \times U, *)$ hat ein Neutralelement.

(iii) Jedes Element im Monoid $(N \times U, *)$ ist invertierbar.

zu (i) Seien $n_1, n_2, n_3 \in N$, $u_1, u_2, u_3 \in U$.

$$((n_1, u_1) * (n_2, u_2)) * (n_3, u_3) = (n_1 \phi(u_1)(n_2), u_1 u_2) * (n_3, u_3)$$

$$(n_1 \phi(u_1)(n_2) \phi(u_1 u_2)(n_3), u_1 u_2 u_3)$$

rechte Seite: $(n_1, u_1) * ((n_2, u_2) * (n_3, u_3)) = (n_1, u_1) * (n_2 \phi(u_2)(n_3), u_2 u_3)$

$= \left(n_1 \phi(u_1)\left(n_2 \phi(u_2)(n_3)\right), u_1 u_2 u_3\right) \underset{\uparrow}{=}$ $\phi(u_1) \in \mathrm{Aut}(N)$

$= \left(n_1 \phi(u_1)(n_2) \cdot \phi(u_1)\left(\phi(u_2)(n_3)\right), u_1 u_2 u_3\right) =$

$\left(n_1 \phi(u_1)(n_2) \left(\phi(u_1) \circ \phi(u_2)\right)(n_3), u_1 u_2 u_3\right) \underset{\uparrow \phi \text{ Hom.}}{=}$

$(n_1, \phi(u_1)(n_2) \phi(u_1 u_2)(n_3), u_1 u_2 u_3)$ Linke und rechte Seite im Assoziativgesetz für $(n_1, u_1), (n_2, u_2), (n_3, u_3)$ stimmen also überein.

$$(n_1, u_1) * (n_2, u_2) = (n_1\, \phi(u_1)(n_2),\ u_1 u_2)$$

zu (ii) überprüfe: $(n,u) * (e_N, e_U) = (n,u)$, $(e_N, e_U) * (n,u) = (n,u)$ für alle $n \in N$, $u \in U$.

Sei also $(n,u) \in N \times U$ vorgeg. $(n,u) * (e_N, e_U) = (n\,\phi(u)(e_N),\ u e_U)$

$= (n e_N,\ u e_U) = (n,u)$ $\quad (e_N, e_U) * (n,u) = (e_N\, \phi(e_U)(n),\ e_U u)$

[$\phi(u) \in \mathrm{Aut}(N)$]

$= (e_N\, id_N(n),\ u) = (n,u)$

[ϕ Hom. somit $\phi(e_U) = id_N$]

zu (iii) Sei $(n,u) \in N \times U$. Für jedes $(n_1, u_1) \in N \times U$ gilt die Äquivalenz $(n,u) * (n_1, u_1) = (e_N, e_U) \Longleftrightarrow$

$\underset{\phi(u)\in \mathrm{Aut}(N)}{=} (e_N \cdot id_N(n), u) = (n, u)$

$(n\phi(u)(n_1), uu_1) = (e_N, e_u) \iff n\phi(u)(n_1) = e_N,\ uu_1 = e_u$

$\iff u_1 = u^{-1},\ \phi(u)(n_1) = n^{-1} \iff u_1 = u^{-1},\ n_1 = \phi(u)^{-1}(n^{-1}) \underset{\phi \text{ Hom}}{=}$

$= \phi(u^{-1})(n^{-1})$ also: $(n, u) * (\phi(u^{-1})(n^{-1}), u^{-1}) = (e_N, e_u)$

Ebenso gilt $(\phi(u^{-1})(n^{-1}), u^{-1}) * (n, u) = (\phi(u^{-1})(n^{-1}) \cdot \phi(u^{-1})(n), u^{-1}u)$

$= (\phi(u^{-1})(n^{-1}n), e_u) = (\phi(u^{-1})(e_N), e_u) = (e_N, e_u)$

Also ist (n, u) invertierbar mit $(n, u)^{-1} = (\phi(u^{-1})(n^{-1}), u^{-1})$

$\square$

Anwendungsbeispiel:

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $N = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ und

$U = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$. Sei $\iota \in \mathrm{Aut}(N)$ geg.

durch $\iota(\bar{a}) = -\bar{a}$ $\forall \bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Sei $\phi: U \to$

$\mathrm{Aut}(N)$ der eind. best. Hom. mit $\phi(\bar{1}) = \iota$.

(Es gilt dann $\phi(\bar{0}) = id_N = id_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$.)

Sei nun $G = N \rtimes_\phi U = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_\phi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Sei $g = (\bar{1}, \bar{0}) = (1 + n\mathbb{Z}, 0 + 2\mathbb{Z})$ und

$h = (\bar{0}, \bar{1}) = (0 + n\mathbb{Z}, 1 + 2\mathbb{Z})$.

$g^2 = g * g = (\bar{1}, \bar{0}) * (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{1} + \phi(\bar{0})(\bar{1}), \bar{0} + \bar{0})$

$= (\bar{1} + id_N(\bar{1}), \bar{0}) = (\bar{1} + \bar{1}, \bar{0}) = (\bar{2}, \bar{0})$

Durch vollständige Induktion lässt sich leicht zeigen, dass $g^m = (m \cdot \bar{1}, \bar{0}) \; \forall m \in \mathbb{N}$ gilt.

Daraus folgt $\operatorname{ord}(g) = n$.

$h^2 = h * h = (\bar{0}, \bar{1}) * (\bar{0}, \bar{1}) = (\bar{0} + \phi(\bar{1})(\bar{0}), \bar{1} + \bar{1}) =$

$(\bar{0} + \bar{0}, \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{0}) = e_G \Rightarrow \operatorname{ord}(h) = 2$

$g * h = (\bar{1}, \bar{0}) * (\bar{0}, \bar{1}) = (\bar{1} + \phi(\bar{0})(\bar{0}), \bar{0} + \bar{1}) =$

$(\bar{1} + id_N(\bar{0}), \bar{0} + \bar{1}) = (\bar{1}, \bar{1})$

$g * h * g * h = (\bar{1}, \bar{1}) * (\bar{1}, \bar{1}) = (\bar{1} + \phi(\bar{1})(\bar{1}), \bar{1} + \bar{1}) =$

$(\bar{1} + \iota(\bar{1}), \bar{2}) = (\bar{1} + (-\bar{1}), \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) = e_G$

insgesamt also: $\mathrm{ord}(g) = n$, $\mathrm{ord}(h) = 2$, $ghgh = e_G$

$\Rightarrow hgh = g^{-1}$ Man kann zeigen, dass die Gruppe G zur Diedergruppe D_n isomorph ist. $\square$

Satz (6.4)

Sei G eine Gruppe, U eine Untergruppe und N ein Normalteiler von G. Wir setzen voraus, dass G das innere semidirekte Produkt N und U ist. Definieren wir $\phi : U \to \mathrm{Aut}(N)$ wie in Proposition 6.1, dann ist durch $(n, u) \mapsto nu$ ein Isomorphismus $N \rtimes_\phi U \cong G$ definiert.

$\mapsto$

ι.

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

d

$(\bar{1}), \bar{0}+\bar{0})$

Beweis von Satz 6.4:

Vor.: G ist inneres semidirektes Produkt von $N \trianglelefteq G$ und $U \leq G$.

Sei $\phi: U \to \operatorname{Aut}(N)$ definiert wie in Prop. 6.1.

z.zg.: $\psi: N \rtimes_\phi U \to G$, $(n,u) \mapsto nu$ ist ein Isomorphismus

Die Bijektivität von ψ folgt aus den Voraussetzungen $G = NU$ und $N \cap U = \{e\}$.

Zum Nachweis der Hom.-eigenschaft seien $(n_1, u_1), (n_2, u_2) \in N \times U$ vorgeg.

z.zg. $\Psi((n_1, u_1) * (n_2, u_2)) = \Psi(n_1, u_1) \cdot \Psi(n_2, u_2)$

$$\Psi((n_1, u_1) * (n_2, u_2)) = \Psi(n_1 \phi(u_1)(n_2), u_1 u_2) =$$

$$n_1 \phi(u_1)(n_2) u_1 u_2 = n_1 \tau_{u_1}(n_2) u_1 u_2 = n_1 u_1 n_2 u_1^{-1} u_1 u_2 =$$

$$n_1 u_1 n_2 u_2 = \Psi(n_1, u_1) \cdot \Psi(n_2, u_2) \qquad \square$$