Der Homomorphiesatz für Gruppen

Satz (4.29)

Sei $\phi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann induziert ϕ einen Isomorphismus

$$\bar{\phi} : G/\ker(\phi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(\phi).$$

Ist der Homomorphismus ϕ surjektiv, dann erhält man also einen Isomorphismus $G/\ker(\phi) \cong H$.

Der Korrespondenzsatz für Gruppen

Satz (4.31)

Sei G eine Gruppe, N ein Normalteiler, $\bar{G} = G/N$ und $\pi_N : G \to \bar{G}$ der kanonische Epimorphismus. Ferner sei $\bar{\mathcal{G}}$ die Menge der Untergruppen von $\bar{G}$ und $\mathcal{G}_N$ die Menge der Untergruppen U von G mit $U \supseteq N$. Dann sind die beiden Abbildungen

$$\mathcal{G}_N \to \bar{\mathcal{G}},\ U \mapsto \pi_N(U) \quad \text{und} \quad \bar{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}_N,\ \bar{U} \mapsto \pi_N^{-1}(\bar{U})$$

bijektiv und zueinander invers. Außerdem gilt:

(i) Für $U, V \in \mathcal{G}_N$ gilt $U \subseteq V$ genau dann, wenn $\pi_N(U) \subseteq \pi_N(V)$ erfüllt ist.

(ii) Genau dann ist $U \in \mathcal{G}_N$ ein Normalteiler von G, wenn $\pi_N(U)$ ein Normalteiler von $\bar{G}$ ist.

(iii) Ist $U \in \mathcal{G}_N$ von endlichem Index in G und $\bar{U} = \pi_N(U)$, dann gilt $(G : U) = (\bar{G} : \bar{U})$.

Die Isomorphiesätze

Satz (4.32)

Sei G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$ und U eine Untergruppe von G.

(i) Dann ist $N \cap U$ ein Normalteiler von U, und es gilt $U/(N \cap U) \cong (UN)/N$.

(ii) Ist auch $U \trianglelefteq G$ und gilt $U \supseteq N$, dann folgt $G/U \cong (G/N)/(U/N)$.

Beweis von Satz 4.32

geg.: Gruppe G, $U \leq G$, $N \trianglelefteq G$

zu (ii) z.zg.: $U / U \cap N \cong UN / N$

Wegen $U \leq G$, $N \trianglelefteq G$ ist UN eine Untergruppe von G.

Aus $N \trianglelefteq G$ und $UN \leq G$ mit $UN \supseteq N$ folgt $N \trianglelefteq UN$.

Betrachte nun die Abb. $\phi: U \to UN/N$, $u \mapsto uN$.

Damit der Homomorphiesatz den angeg. Isomorphismus liefert, müssen wir überprüfen

(1) ϕ ist ein Gruppenhom. (2) ϕ ist surjektiv

(3) $\ker(\phi) = U \cap N$

zu (1) klar, denn ϕ ist die Komposition der Abbildung
$U \to UN$, $u \mapsto u$ (Einbettungshomomorphismus) mit
dem kanonischen Epimorphismus $\pi_N : UN \to UN/N$

zu (2) Sei $gN \in UN/N$, mit $g \in UN$. z. zg.:
Es gibt ein $u \in U$ mit $\phi(u) = gN$.
$g \in UN \Rightarrow \exists u \in U, n \in N$ mit $g = un$.
Beh.: $\phi(u) = gN$, gleichbedeutend: $uN = gN$
bzw. $uN = unN$. Dies ist wegen $un \in uN$
tatsächlich der Fall.

zu (3) Sei $u \in U$. z. zg.: $u \in \ker(\phi) \Leftrightarrow u \in U \cap N$
Tatsächlich gilt: $u \in \ker(\phi) \Leftrightarrow \phi(u) = e_{UN/N} \Leftrightarrow$

$uN = N \Leftrightarrow u \in N \overset{u \in U}{\Leftrightarrow} u \in U \cap N$

<u>zu (ii)</u> Setze zusätzlich $U \trianglelefteq G$ und $U \supseteq N$ voraus.

zzg: $G/U \cong (G/N)/(U/N)$

Auf Grund der Surjektivität von $\pi_N : G \to G/N$ ist das Bild $U/N = \pi_N(U)$ des Normalteilers U von G ein Normalteiler von G/N. Somit kann die Faktorgruppe $(G/N)/(U/N)$ tatsächlich gebildet werden.

Betrachte nun die Abbildung

$$\phi : G \to (G/N)/(U/N), \; g \mapsto gN(U/N)$$

zu überprüfen: (1) ϕ ist ein Gruppenhomomorphismus (2) ϕ ist surjektiv (3) $\ker(\phi) = U$

zu (1) klar, denn ϕ ist die Komposition der beiden kanonischen Epimorphismen $\pi_N : G \to G/N,\ g \mapsto gN$ und $\pi_{U/N} : G/N \to (G/N)/(U/N),\ \bar{g} \mapsto \bar{g}(U/N)$

zu (2) klar, da ϕ als Komposition der beiden Epimorphismen π_N und $\pi_{U/N}$ selbst ein Epimorphismus ist

zu (3) Sei $g \in G$. Dann gilt die Äquivalenz

$$g \in \ker(\phi) \Leftrightarrow \phi(g) = e_{(G/N)/(U/N)} \Leftrightarrow$$
$$gN(U/N) = U/N \Leftrightarrow gN \in U/N \Leftrightarrow$$
$$\exists u \in U : gN = uN \Leftrightarrow \exists u \in U : g \in uN$$

$\Leftarrow$

$\Leftarrow$

Anwe

$G = ($

$= 2\mathbb{Z}$

Somit

U/N

$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

...hismus

...nden

$, g \mapsto gN$

$U/N)$

Epi-

...phismus ist

...lenz

$\Longleftrightarrow$

$g \in uN$

$$\Longleftrightarrow \exists u \in U, n \in N: \ g = un$$

$$\Longleftrightarrow g \in UN \underset{N \subseteq U}{\Longleftrightarrow} g \in U \qquad \square$$

Anwendungsbeispiel zu Satz 4.32 (ii).

$G = (\mathbb{Z}, +)$, $N = \langle 6 \rangle = 6\mathbb{Z}$, $U = \langle 2 \rangle = 2\mathbb{Z}$. Wegen $2 \mid 6$ gilt $6 \in 2\mathbb{Z}$ und somit $N = \langle 6 \rangle \subseteq \langle 2 \rangle = U$, außerdem: $U/N = \langle 2 + 6\mathbb{Z} \rangle$. Der Satz liefert also

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \,/\, \langle 2 + 6\mathbb{Z} \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Ziele:

- Jede endlich erzeugte abelsche Gruppe ist ein direktes Produkt zyklischer Gruppen, genauer:
- Jede endliche abelsche Gruppe hat bis auf Isomorphie die Form

$$\mathbb{Z}/p_1^{e_1}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p_r^{e_r}\mathbb{Z}$$

  mit $r \in \mathbb{N}_0$, $e_1, \ldots, e_r \in \mathbb{N}$ und Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$.
- Jede endliche erzeugte abelsche Gruppe hat bis auf Isomorphie die Form

$$\mathbb{Z}^s \times \mathbb{Z}/p_1^{e_1}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p_r^{e_r}\mathbb{Z}$$

  mit $r, s \in \mathbb{N}_0$, $e_1, \ldots, e_r \in \mathbb{N}$ und Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$.

Surjektive Bilder endlich erzeugter Gruppen

Lemma (5.1)

Seien G, H beliebige Gruppen. Ist G endlich erzeugt und existiert ein surjektiver Homomorphismus $\phi : G \to H$, dann ist auch H endlich erzeugt.

additive Notation:

Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe, und seien $U, V \leq G$. die Schreibweise $G = U \oplus V$ bedeutet, dass G ein inneres direktes Produkt von U und V ist.

Beweis von Lemma 5.1

geg: endl. erzeugte Gruppe G, H weitere Gruppe.

$\phi : G \to H$ ein surjektiver Gruppenhom.

Sei S ein endl. Erzeugendensystem von G.

<u>Beh.</u>: $\phi(S)$ ist ein Erzeugendensystem von H

(und dies ist offensichtlich endlich)

z.zg.: $H = \langle \phi(S) \rangle$ Überprüfe die definierenden Eigenschaften von $\langle \phi(S) \rangle$ für die Gruppe H

klar: H ist Untergr. von H, $H \supseteq \phi(S)$

Sei V eine bel. Untergr. von H mit $V \supseteq \phi(S)$.

Sei V eine bel. Untergr. von H mit $V \supseteq \phi(S)$.

Zu zeigen ist dann $V \supseteq H$ (gleichbed. $V = H$)

$V \supseteq \phi(S) \Rightarrow \phi^{-1}(V) \supseteq S$ (nach Def. des Urbilds)

$\xRightarrow{\phi^{-1}(V) \leq G} \phi^{-1}(V) \supseteq \langle S \rangle \xRightarrow{G = \langle S \rangle} \phi^{-1}(V) \supseteq G$

$\Rightarrow \phi(G) \subseteq V \xRightarrow[\text{da } \phi \text{ surj.}]{\phi(G) = H} H \leq V$ $\square$

Definition der Torsionsuntergruppen

Definition (5.2)

Sei G eine abelsche Gruppe und $m \in \mathbb{N}$.

(i) Man nennt $G[m] = \{g \in G \mid mg = 0_G\}$ die *m-Torsionsuntergruppe* von G.

(ii) Die Teilmenge $\mathrm{Tor}(G) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G[n]$ wird die *Torsionsuntergruppe* von G genannt.

Definition der Torsionsfreiheit

Definition (5.3)

Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe.

(i) Wir bezeichnen G als torsionsfrei, wenn $\mathrm{Tor}(G) = \{0_G\}$ gilt.

(ii) Die Gruppe G ist frei, wenn für ein $r \in \mathbb{N}_0$ ein Isomorphismus zwischen G und $(\mathbb{Z}^r, +)$ existiert, wobei $\mathbb{Z}^0 = \{0\}$ gesetzt wird.

Freie und torsionsfreie endliche abelsche Gruppen

Proposition (5.4)

(i) Jede Untergruppe einer freien endlich erzeugten abelschen Gruppe ist eine freie endlich erzeugte abelsche Gruppe.

(ii) Jede torsionsfreie endlich erzeugte abelsche Grupe ist frei.

Beweisskizze zu Proposition 5.4 (i)

- Rückführung des Beweises auf eine Untergruppe U von $\mathbb{Z}^n$
- Beweis der Aussage durch vollständige Induktion über n
- Für den Induktionsschritt betrachte die Projektion $\pi : \mathbb{Z}^{n+1} \to \mathbb{Z}$ auf die letzte Komponente.
- Auf $\ker(\pi|_U)$ kann die Induktionsvoraussetzung angewendet werden, und es gilt $\pi(U) = m\mathbb{Z}$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Es folgt $\ker(\pi|_U) \cong \mathbb{Z}^s$ für ein $s \in \mathbb{N}_0$ und $\pi(U) \cong \mathbb{Z}^t$ mit $t \in \{0, 1\}$.
- Die Untergruppe U ist inneres direktes Produkt von $\ker(\pi|_U)$ und $\langle v \rangle$, falls $v \in U$ mit $\pi(v) = m$ ist, mit $v = 0_{\mathbb{Z}^{n+1}}$ falls $m = 0$. Man erhält so einen Isomorphismus $U \cong \ker(\pi|_U) \times \pi(U) \cong \mathbb{Z}^{s+t}$.

Zum Beweis von Prop. 5.4 (i)

geg.: $n \in \mathbb{N}$, $\pi : \mathbb{Z}^{n+1} \to \mathbb{Z}$, $(a_1, \dots, a_{n+1}) \mapsto a_{n+1}$

$\ker(\pi) = \mathbb{Z}^n \times \{0\}$, $U \leq \mathbb{Z}^{n+1}$

$m \in \mathbb{N}_0$ mit $\pi(U) = m\mathbb{Z}$

$v \in U$ mit $\pi(u) = m$, wobei $v = 0$ falls $m = 0$

Beh.: U ist inneres direktes Produkt von $\ker(\pi|_U)$ und $\langle v \rangle$

klar: Weil U abelsch ist, sind $\ker(\pi|_U)$ und $\langle v \rangle$ beides Normalteiler. Zu überprüfen:

(1) $\ker(\pi|_U) \cap \langle v \rangle = \{0\}$ (2) $U = \ker(\pi|_U) + \langle v \rangle$

zu (1) genügt „$\subseteq$" Sei $u \in \ker(\pi|_U) \cap \langle v \rangle$

$u \in \ker(\pi|_U) \Longrightarrow \pi(u) = 0$

$u \in \langle v \rangle \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ mit $u = kv \Longrightarrow$

$\pi(u) = k\pi(v) = km \Longrightarrow km = 0$

$\Longrightarrow k = 0$ oder $m = 0$ 1. Fall: $k = 0 \Longrightarrow$

$u = kv = 0 \cdot v = 0$ 2. Fall: $m = 0 \Rightarrow v = 0$

$\Longrightarrow u = kv = 0$

zu (2) genügt „$\subseteq$" Sei $u \in U$ vorgeg. $\Longrightarrow$

$\pi(u) \in \pi(U) \Longrightarrow \pi(u) \in m\mathbb{Z} \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ mit

$\pi(u) = km$. Setze $u' = u - kv$. $\Longrightarrow$

$\pi(u') = \pi(u) - k\pi(v) = km - km = 0.$

$\Rightarrow u' \in \ker(\pi|_U) \Rightarrow u = u' + kv$ liegt in $\ker(\pi|_U) + \langle v \rangle$. $\square$

a_{n+1}

ls $m=0$

$|_U)$ und

gen:

$\pi|_U) + \langle v \rangle$

Beweisskizze zu Proposition 5.4 (ii)

- Sei S ein endliches Erzeugendensystem von G und $T = \{g_1, ..., g_n\} \subseteq S$ maximal mit der Eigenschaft, dass $\phi(a_1, ..., a_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k g_k$ injektiv ist. Dann ist $U = \langle T \rangle$ eine freie endlich erzeugte abelsche Gruppe.
- Zeige mit Hilfe der Maximalität: Für jedes $g \in S$ gibt es ein $a_g \in \mathbb{N}$ mit $a_g g \in U$ (mit $a_g = 1$ falls $g \in T$).
- Da S endlich ist, gilt $aS \subseteq U$ für ein $a \in \mathbb{N}$, und somit auch $aG \subseteq U$. Nach (i) ist mit U auch aG eine freie endlich erzeugte abelsche Gruppe.
- Auf Grund der Torsionsfreiheit ist $G \to aG$, $g \mapsto ag$ eine injektive Abbildung, es gilt also $G \cong aG$. Also ist auch G eine freie endlich erzeugte abelsche Gruppe.

Zerlegung in Torsionsanteil und freien Anteil

Satz (5.5)

Ist G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe, dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}_0$ mit $G \cong \mathbb{Z}^r \times \mathrm{Tor}(G)$. Darüber hinaus ist $\mathrm{Tor}(G)$ eine endliche abelsche Gruppe.