Überblick § 4: Homomorphismen und Faktorgruppen

- Definition der Gruppenhomomorphismen
- Struktur der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(G)$ für eine zyklische Gruppe G
- Definition der Normalteiler ($N \trianglelefteq G$)
- Komplexprodukte von Untergruppen ($NU = \{nu \mid n \in N\ ,\ u \in U\}$), innere direkte Produkte
- Definition der Faktorgruppe G/N ($N \trianglelefteq G$)
- Homomorphiesatz $G/N \cong H$, falls $\phi : G \to H$ Epimorphismus und $N = \ker(\phi)$, Isomorphiesätze als Folgerung
- Korrespondenzsatz (Untergruppenstruktur von G/N vs. Untergruppenstruktur von G)

Eine Verknüpfung auf den Linksnebenklassen

Proposition (4.26)

Sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler von G. Dann gibt es auf der Menge G/N eine eindeutig bestimmte Verknüpfung $\cdot$ mit der Eigenschaft

$$(gN) \cdot (hN) \quad = \quad (gh)N \qquad \text{für alle} \quad g, h \in G.$$

Satz (4.27)

Sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler. Dann ist die Menge G/N der Linksnebenklassen mit der Verknüpfung $gN \cdot hN = (gh)N$ eine Gruppe, die sogenannte Faktorgruppe von G modulo N. Die Abbildung $\pi_N : G \to G/N$, $g \mapsto gN$ ist ein Epimorphismus von Gruppen, der sog. kanonische Epimorphismus.

wichtiges Beispiel: die Faktorgruppen $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

Der induzierte Homomorphismus

Proposition (4.28)

Sei $\phi : G \to H$ ein Gruppen-Homomorphismus und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler mit $N \subseteq \ker(\phi)$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\bar{\phi} : G/N \to H$ mit

$$\bar{\phi}(gN) \quad = \quad \phi(g) \qquad \text{für alle } g \in G.$$

Man nennt $\bar{\phi}$ den durch ϕ induzierten Homomorphismus.

Beweis von Proposition 4.28

geg: Hom. $\phi: G \to H$ von Gruppen
$N \trianglelefteq G$ mit $N \subseteq \ker(\phi)$

z.zg: Es gibt einen Hom. $\overline{\Phi}: G/N \to H$ mit
$\overline{\Phi}(gN) = \phi(g) \;\forall g \in G$. Satz 4.25

Um den Satz von der induzierten Abb.(*) anwenden zu können
müssen wir zeigen: $g \equiv g' \Rightarrow \phi(g) = g' \;\forall g, g' \in G$,
wobei $\equiv$ geg. ist durch $g \equiv g' \Longleftrightarrow g' \in gN$
Seien also $g, g' \in G$ mit $g \equiv g'$. $\Rightarrow g' \in gN \Rightarrow \exists n \in N$ mit
$g' = gn$ $\quad N \subseteq \ker(\phi) \Rightarrow \phi(n) = e_H$

Daraus folgt $\phi(g') = \phi(gn) = \phi(g)\phi(n) = \phi(g) \cdot e_H = \phi(g)$.

$\square$

Der Homomorphiesatz für Gruppen

Satz (4.29)

Sei $\phi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann induziert ϕ einen Isomorphismus

$$\bar{\phi} : G/\ker(\phi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(\phi).$$

Ist der Homomorphismus ϕ surjektiv, dann erhält man also einen Isomorphismus $G/\ker(\phi) \cong H$.

Beweis von Satz 4.29

geg.: Gruppenhom. $\phi : G \to H$

Diese kann als Hom. $\phi : G \to \mathrm{im}(G)$ betrachtet werden. Anwendung von Prop. 4.28 auf $N = \ker(\phi)$ liefert einen Hom.
$\bar{\Phi} : G/N \to \mathrm{im}(\phi)$ mit $\bar{\Phi}(gN) = \phi(g)$
$\forall g \in G$. z.zg.: $\bar{\Phi}$ ist bijektiv

(i) Surjektivität: Sei $h \in \mathrm{im}(\phi)$. Nach Def. des Bilds gibt es ein $g \in G$ mit $\phi(g) = h$.
$\Rightarrow \bar{\Phi}(gN) = \phi(g) = h$

(ii) Injektivität: genügt z.zg. $\ker(\bar{\phi}) \subseteq \{e_{G/N}\}$

Sei $\bar{g} \in \ker(\bar{\phi})$ und $g \in G$ mit $\bar{g} = gN$.

$\Rightarrow \phi(g) = \bar{\phi}(\bar{g}) = e_H \Rightarrow g \in \ker(\phi) \Rightarrow$

$g \in N \Rightarrow \bar{g} = gN = N = e_{G/N}$ $\square$

Anwendungen des Homomorphiesatzes.

(i) Für jede Gruppe G gilt $G/\{e_G\} \cong G$.

Wende dazu den Hom-satz auf den Hom. $id_G : G \to G$, $g \mapsto g$ an. Offenbar ist G das Bild des Hom., außerdem $\ker(id_G) = \{e_G\}$, denn: $g \in \ker(id_G) \Leftrightarrow id_G(g) = e_G \Leftrightarrow g = e_G$ $\forall g \in G$.
Die Anwendung des Hom.-satzes liefert also den angegebenen Isomorphismus.

(ii) Für jede Gruppe G gilt $G/G \cong \{e_G\}$.

Wende den Hom.-satz an auf die Abb. $\phi : G \to \{e_G\}$, $g \mapsto e_G$. Überprüfe: ϕ ist Gruppenhom., ϕ ist surjektiv, und es gilt $\ker(\phi) = G$. Also liefert der Hom.-satz einen Isomorphismus wie angegeben.

e-

.28

$\phi(g)$

nach Def.

$\phi(g) = h$.

(iii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ existiert ein Isomorphismus $S_n / A_n \cong (\{\pm 1\}, \cdot)$

Wende den Hom.-satz an auf die Signumsabb. $\operatorname{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}$.

- Die Abb. ist ein Hom., denn bekanntlich gilt $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\tau) \ \forall \sigma, \tau \in S_n$.
- Die Abb. ist surjektiv wegen $\operatorname{sgn}(id) = 1$, $\operatorname{sgn}((12)) = -1$.
- Es gilt $\ker(\operatorname{sgn}) = \{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sgn}(\sigma) = 1\} = A_n$.

Also liefert der Hom.-satz den angeg. Isom.

(iv) Für jeden Körper K und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$GL_n(K) / SL_n(K) \cong K^{\times}.$$

Betrachte die Abb. $\det : M_{n,K} \to K$. Durch Einschränkung auf $GL_n(K)$ erhalten wir eine Abb. $\phi: GL_n(K) \to K^*$, wegen $\det(A) \neq 0 \ \forall A \in GL_n(K)$. Diese Abb. ist ein Gruppenhom. wegen $\phi(AB) = \det(AB) = \det(A)\det(B) = \phi(A)\phi(B)$ $\forall A, B \in GL_n(K)$. Damit der Hom-satz den angeg. Isom. liefert, muss noch überprüft werden:

(i) ϕ ist surjektiv (ii) $\ker(\phi) = SL_n(K)$

<u>zu (i)</u> Sei $a \in K^*$. Sei $A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$. Dann gilt $\det(A) = a \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1$ $= a \neq 0 \Rightarrow A \in GL_n(K)$, und $\phi(A) = a$.

<u>zu (ii)</u> Für jedes $A \in GL_n(K)$ gilt die Äquivalenz $A \in \ker(\phi) \Leftrightarrow \phi(A) = 1_K \Leftrightarrow \det(A) = 1_K \Leftrightarrow A \in SL_n(K)$.

An dieser Stelle kam in der Vorlesung die Frage auf, wie denn die Abbildung $\bar{\phi}$ bijektiv sein kann, wenn doch z.B. im Fall $n = 2$ für gegebenes $a \in K^\times$ die Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

beide ϕ auf das Element a abgebildet werden. An dieser ist es wichtig, sich den Unterschied zwischen ϕ und $\bar{\phi}$ klar zu machen: Die Abbildung ϕ ist tatsächlich in der Regel nicht bijektiv, wie das Beispiel zeigt. Allerdings ist $\bar{\phi}$ ja nicht auf $\mathrm{GL}_2(K)$, sondern auf der Faktorgruppe

$$\mathrm{GL}_2(K)/\mathrm{SL}_2(K)$$

definiert. In der Faktorgruppe stimmen die beiden Elemente

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{SL}_2(K) \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mathrm{SL}_2(K)$$

überein, wie auf der folgenden Tafel gezeigt wird.

$A \in \ker(\phi) \iff \phi(A) = 1_K \iff \det(A) = 1_K \iff A \in SL_n(K)$.

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} SL_n(K) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} SL_2(K)$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} SL_2(K)$$

ist erfüllt, wegen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, und $\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in SL_2(K)$

wegen $\det \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a^{-1} \cdot a = 1_K$

Korespondenzsatz (Vorb.)

Proposition (4.30)

Sei G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler und $\pi_N : G \to G/N$ der kanonische Epimorphismus.

(i) Ist U eine Untergruppe von G, dann gilt $\pi_N^{-1}(\pi_N(U)) = UN$.

(ii) Ist $\bar{U}$ eine Untergrupe von G/N, dann gilt $\pi_N(\pi_N^{-1}(\bar{U})) = \bar{U}$.

Beweis von Prop. 4.30

geg: Gruppe G, $N \trianglelefteq G$, $\pi_N : G \to G/N$, $g \mapsto gN$

<u>zu (i)</u> Sei $U \leq G$. <u>Beh.</u>: $\pi_N^{-1}(\pi_N(U)) = UN$

„$\subseteq$" Sei $g \in \pi_N^{-1}(\pi_N(U))$. $\Rightarrow \pi_N(g) \in \pi_N(U) \Rightarrow$

$\exists\, u \in U$ mit $gN = uN \Rightarrow g \in uN \Rightarrow \exists\, n \in N$

mit $g = un \Rightarrow g \in UN$

„$\supseteq$" Sei $g \in G \Rightarrow \exists\, u \in U, n \in N$ mit $g = un$

z.zg.: $g \in \pi_N^{-1}(\pi_N(U))$, gleichbed. $\pi_N(g) \in \pi_N(U)$

Dies ist erfüllt, wegen $\pi_N(g) = \pi_N(un) = unN$.

und $unN = uN \in \pi_N(U)$ wegen $un \in uN$.

z.zg. $g \in \pi_N^{-1}(\pi_N(U))$, gleichbed. $\pi_N(g) \in \pi_N(U)$

zu (ii) Sei $\bar{U} \le G/N$. Beh: $\pi_N(\pi_N^{-1}(\bar{U})) = \bar{U}$

„$\subseteq$" Sei $\bar{g} \in \pi_N(\pi_N^{-1}(U)) \Rightarrow \exists\, g \in \pi_N^{-1}(\bar{U})$ mit $\pi_N(g) = \bar{g}$

$g \in \pi_N^{-1}(\bar{U}) \Rightarrow \pi_N(g) \in \bar{U} \Rightarrow \bar{g} \in \bar{U}$

„$\supseteq$" Sei $\bar{g} \in \bar{U}$ und $g \in G$ mit $\bar{g} = gN$

$\pi_N(g) = \bar{g}$, $\bar{g} \in \bar{U} \Rightarrow g \in \pi_N^{-1}(\bar{U}) \Rightarrow$

$\bar{g} = \pi_N(g) \in \pi_N(\pi_N^{-1}(\bar{U}))$ $\square$

Der Korrespondenzsatz für Gruppen

Satz (4.31)

Sei G eine Gruppe, N ein Normalteiler, $\bar{G} = G/N$ und $\pi_N : G \to \bar{G}$ der kanonische Epimorphismus. Ferner sei $\bar{\mathcal{G}}$ die Menge der Untergruppen von $\bar{G}$ und $\mathcal{G}_N$ die Menge der Untergruppen U von G mit $U \supseteq N$. Dann sind die beiden Abbildungen

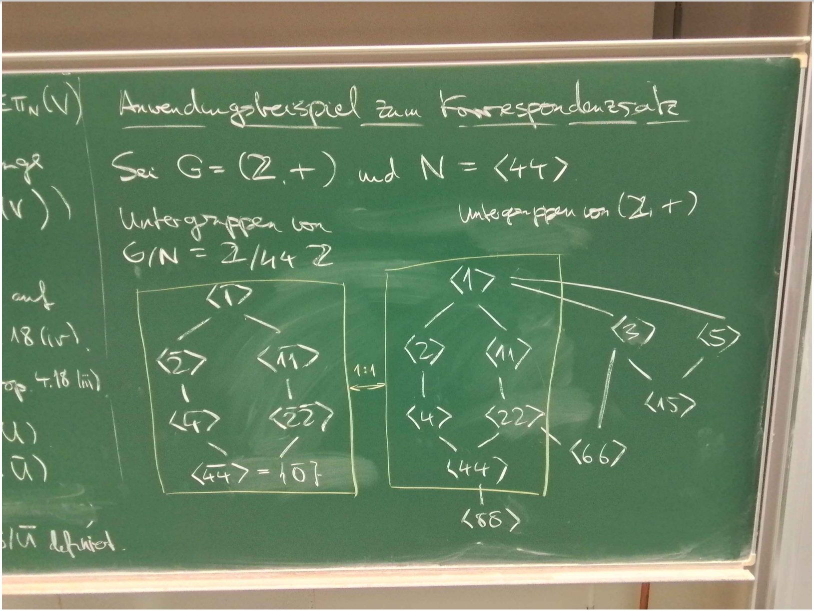
$$\mathcal{G}_N \to \bar{\mathcal{G}},\ U \mapsto \pi_N(U) \ \text{ und } \ \bar{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}_N,\ \bar{U} \mapsto \pi_N^{-1}(\bar{U})$$

bijektiv und zueinander invers. Außerdem gilt:

(i) Für $U, V \in \mathcal{G}_N$ gilt $U \subseteq V$ genau dann, wenn $\pi_N(U) \subseteq \pi_N(V)$ erfüllt ist.

(ii) Genau dann ist $U \in \mathcal{G}_N$ ein Normalteiler von G, wenn $\pi_N(U)$ ein Normalteiler von $\bar{G}$ ist.

(iii) Ist $U \in \mathcal{G}_N$ von endlichem Index in G und $\bar{U} = \pi_N(U)$, dann gilt $(G : U) = (\bar{G} : \bar{U})$.



Anmerkung: Die Gruppen $\langle \bar{2} \rangle$ und $\langle \overline{22} \rangle$ bzw. $\langle 2 \rangle$ und $\langle 22 \rangle$ müssen noch durch jeweils eine Kante verbunden werden.

(gu)

$\pi_N(gU)$

sichen,

prüfen.

$\square$

Beweis von Satz 4.31

geg.: G Gruppe, $N \trianglelefteq G$, $\bar{G} = G/N$

$\pi_N : G \to \bar{G}$ kanonischer Epimorphismus

$\bar{\mathcal{G}}$ = Menge der Untergruppen von $\bar{G}$

$\mathcal{G}_N$ = Menge der Unterg. $U \leq G$ mit $U \geq N$

Beh.: Die Zuordnungen $\phi : \mathcal{G}_N \to \bar{\mathcal{G}}$, $U \mapsto \pi_N(U)$ und $\psi : \bar{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}_N$, $\bar{U} \mapsto \pi_N^{-1}(\bar{U})$ sind zueinander invers.

(1) Sei $U \in \mathcal{G}_N$. Dann gilt $(\psi \circ \phi)(U) = \psi(\pi_N(U)) = \pi_N^{-1}(\pi_N(U)) \underset{\text{Prop. 4.30}}{=} UN \underset{\substack{N \trianglelefteq U \\ \text{Prop. 4.20 (iii)}}}{=} NU \underset{\substack{N \leq U \\ \text{Prop. 4.20 (ii)}}}{=} U$.

(2) Sei $\bar{U} \in \bar{\mathcal{G}}$. Dann gilt $(\phi \circ \psi)(\bar{U}) = \phi(\pi_N^{-1}(\bar{U})) = \pi_N(\pi_N^{-1}(\bar{U})) = \bar{U}$ nach Prop. 4.30.

zu (i) Seien $U, V \in \mathcal{G}_N$. Beh: $U \subseteq V \Leftrightarrow \pi_N(U) \subseteq \pi_N(V)$

„$\Rightarrow$" offensichtlich, nach Def. der Bildmenge

„$\Leftarrow$" $\pi_N(U) \subseteq \pi_N(V) \Rightarrow \pi_N^{-1}(\pi_N(U)) \subseteq \pi_N^{-1}(\pi_N(V))$

$\overset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow} U \subseteq V$

zu (ii) Aus $U \trianglelefteq G$ folgt $\pi_N(U) \trianglelefteq \pi_N(G) = \bar{G}$ auf Grund der Surjektivität von π_N, nach Prop. 4.18 (iv).

Aus $\bar{U} \trianglelefteq \bar{G}$ folgt $\pi_N^{-1}(\bar{U}) \trianglelefteq \pi_N^{-1}(\bar{G})$ nach Prop. 4.18 (iii)

zu (iii) Sei $U \in \mathcal{G}_N$ mit endlichem Index $(G:U)$

Beh: Für $\bar{U} = \pi_N(U)$ gilt $(G:U) = (\bar{G}:\bar{U})$

Zeige dafür: Durch $gU \mapsto \pi_N(gU)$ ist eine Bijektion zwischen G/U und $\bar{G}/\bar{U}$ definiert.

Sei $g \in G$ und $\bar{g} = \pi_N(g) = gN$. überprüfe:

$$\pi_N(gU) = \bar{g}\,\bar{U}$$

„$\subseteq$" Sei $\bar{h} \in \pi_N(gU) \Rightarrow \exists u \in U$ mit $\bar{h} = \pi_N(gu)$ $= \bar{g}(uN) \in \bar{G}/\bar{U}$ „$\supseteq$" Sei $\bar{h} \in \bar{g}\,\bar{U}$. $\Rightarrow \exists \bar{u} \in \bar{U}$ mit $\bar{h} = \bar{g}\bar{u}$. Sei $u \in U$ mit $\bar{u} = gU \Rightarrow \pi_N(gu) = \bar{g}\,\bar{u} = \bar{h} \Rightarrow \bar{h} \in \pi_N(gU)$

Also ist $gU \mapsto \pi_N(gU)$ eine Abbildung zwischen G/U und $\bar{G}/\bar{U}$ definiert. Es bleibt zu überprüfen, das diese bijektiv ist (siehe Skript) $\square$

Anmerkung zum Beweis von Satz 4.31 (iii)

An der Tafel habe ich eine Abbildung $\phi : G/U \to \bar{G}/\bar{U}$ angegeben, im Skript dagegen eine Abbildung in umgekehrter Richtung, also $\bar{G}/\bar{U} \to G/U$. Deshalb muss der Nachweis der Bijektivität auch anders geführt werden als im Skript.

Surjektivität: Jedes Element in $\bar{G}/\bar{U}$ hat die Form $\bar{g}\bar{U}$, mit $\bar{g} \in \bar{G}$. Sei $g \in G$ mit $\pi_N(g) = \bar{g}$. Dann folgt $\phi(gU) = \pi_N(gU) = \bar{g}\bar{U}$.

Injektivität: Seien $g_1, g_2 \in G$ mit $\phi(g_1 U) = \phi(g_2 U)$ vorgegeben. Zu zeigen ist $g_1 U = g_2 U$. Aus der Voraussetzung folgt zunächst $\pi_N(g_1)\bar{U} = \pi_N(g_2)\bar{U}$. Daraus wiederum folgt $\pi_N(g_2) \in \pi_N(g_1)\bar{U}$, also

$$\pi_N(g_2) = \pi_N(g_1)\pi_N(u) = \pi_N(g_1 u)$$

für ein $u \in U$. Aus der Gleichung $g_2 N = (g_1 u)N$ folgt nun $g_2 \in g_1 un$, wegen $N \subseteq U$ also $g_2 \in g_1 U$ und damit $g_1 U = g_2 U$.