

Überblick §4: Homomorphismen und Faktorgruppen

- Definition der **Gruppenhomomorphismen**
- Struktur der Automorphismengruppe $\text{Aut}(G)$ für eine zyklische Gruppe G
- Definition der **Normalteiler** ($N \trianglelefteq G$)
- Komplexprodukte von Untergruppen
($NU = \{nu \mid n \in N, u \in U\}$), innere direkte Produkte
- Definition der **Faktorgruppe** G/N ($N \trianglelefteq G$)
- Homomorphiesatz $G/N \cong H$, falls $\phi : G \rightarrow H$ Epimorphismus und $N = \ker(\phi)$, Isomorphiesätze als Folgerung
- Korrespondenzsatz (Untergruppenstruktur von G/N vs. Untergruppenstruktur von G)

Definition der Komplexprodukte

Definition (4.19)

Sei G eine Gruppe, und seien $A, B \subseteq G$ beliebige Teilmengen. Dann nennt man die Teilmenge $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ das **Komplexprodukt** von A und B .

Bei Gruppen in additiver Schreibweise verwendet man für das Komplexprodukt die Schreibweise $A + B$ statt AB .

Lemma (4.20)

Sei G eine Gruppe, und seien U und N Untergruppen von G .

- (i) Gilt $U \cap N = \{e\}$, dann hat jedes Element $g \in UN$ eine eindeutige Darstellung der Form $g = un$, mit $u \in U$ und $n \in N$.
- (ii) Gilt $U \subseteq N$, dann folgt $UN = N$.
- (iii) Gilt $UN = NU$, dann ist UN eine Untergruppe von G .
Ersteres ist insbesondere dann gegeben, wenn N ein Normalteiler von G ist.
- (iv) Sind N und U Normalteiler von G , dann folgt $UN \trianglelefteq G$.

Definition des Normalisators

Definition (4.21)

Sei G eine Gruppe und $U \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann nennt man $N_G(U) = \{g \in G \mid gUg^{-1} = U\}$ den **Normalisator** von U in G .

Die Bedeutung des Normalisators wird durch die folgende Proposition deutlich.

Proposition (4.22)

Sei G eine Gruppe und U eine Untergruppe. Dann ist $N_G(U)$ die **größte** Untergruppe H von G mit der Eigenschaft, dass U Normalteiler von H ist.

Beweis von Prop. 4.22

geg: G Gruppe, $U \leq G$ Untergruppe

$$N_G(U) = \{g \in G \mid gUg^{-1} = U\}$$

zeige (i) $U \trianglelefteq N_G(U)$ (ii) $V \leq G, U \trianglelefteq V \Rightarrow V \leq N_G(U)$

zu i) Nach Def. gilt $\forall g \in N_G(U): gUg^{-1} = U \Rightarrow U \trianglelefteq N_G(U)$

zu ii) Sei V Untergr. von G mit $U \trianglelefteq V \Rightarrow \forall v \in V: vUv^{-1} = U$
 $\Rightarrow \forall v \in V: v \in N_G(U) \Rightarrow V \leq N_G(U) \quad \square$

Anwendungsbeispiel. Elemente der Diedergruppe

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Erinnerung: $D_n = \langle \rho, \tau \rangle$, wobei
 ρ = Drehung um $\frac{2\pi}{n}$, τ = Spiegelung an der x -Achse

Rechenregeln: $\rho^n = \tau^2 = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$, $\tau \rho^k \tau = \rho^{-k}$ $0 \leq k < n$

Beh. $D_n = \{ \rho^k \mid 0 \leq k < n \} \cup \{ \rho^k \tau \mid 0 \leq k < n \}$ (*)

Es genügt zu zeigen, dass D_n eine Untergr. von $GL_2(\mathbb{R})$ ist.

Sei $N = \{ \rho^k \mid 0 \leq k < n \}$, $U = \{ \text{id}, \tau \}$. Beides sind Untergruppen von $GL_2(\mathbb{R})$, da $N = \langle \rho \rangle$ und $U = \langle \tau \rangle$ ist. Die rechte Seite von (*) ist offenbar das Komplexprodukt NU

Beh. $N \leq D_n$, wobei $D_n = \langle \rho, \tau \rangle$ (daraus folgt die Untergr.-eigenschaft von NU , nach Lemma 4.20 (iii)).

Nach Prop. 4.22 genügt es z.zg.: $N_{D_n}(N) = D_n$.

Wegen $D_n = \langle \rho, \tau \rangle$ genügt es, $\rho, \tau \in N_{D_n}(N)$

nachzuweisen. Dabei folgt $\rho \in N_{D_n}$ direkt

aus $\rho \in N$, und $N_{D_n}(N) \supseteq N$. Die

Gleichung $\tau \rho^k \tau = \rho^{-k} \forall k \in \{0, \dots, n-1\}$

(gleichbed. $\tau \rho^k \tau^{-1} = \rho^{-k}$ wegen $\tau^2 = \text{id}$)

liefert $\tau \in N_{D_n}(N)$. $\square$

Definition (4.23)

Sei G eine Gruppe, und seien U, N Untergruppen von G . Wir bezeichnen G als **inneres direktes Produkt** von U und N , wenn gilt

- $U \trianglelefteq G$ und $N \trianglelefteq G$,
- $G = UN$ und
- $U \cap N = \{e\}$.

Ist lediglich N eine Normalteiler von G , aber nicht notwendigerweise die Untergruppe U , dann spricht man von einem inneren **semidirekten** Produkt.

Proposition (4.24)

Sei G eine Gruppe und inneres direktes Produkt ihrer Untergruppen U und N . Dann gilt $G \cong U \times N$.

Beweis von Prop 4.24

geg: Gruppe G , $U, N \trianglelefteq G$, $U \cap N = \{e\}$
und $UN = G$ z.zg: $G \cong N \times U$

Beh. Die Abb. $\phi: N \times U \rightarrow G, (n, u) \mapsto nu$
ist ein Isomorphismus von Gruppen.

zeige: (1) ϕ ist Gruppenhom. (2) ϕ ist inj.
(3) ϕ ist surjektiv

zu (1) Sei $u, u' \in U, n, n' \in N$. z.zg:

$$\phi((n, u) \cdot (n', u')) = \phi(n, u) \cdot \phi(n', u')$$

$$\text{gleichbed. } \phi(nn', uu') = \phi(n, u) \cdot \phi(n', u')$$

$$\text{bzw. } nn'uu' = nu n' u'$$

genießt z.zg: $n'u = un'$, äquivalent:

$$n'u(n')^{-1} = u \text{ bzw. } n'u(n')^{-1}u^{-1} = e$$

$$n'u(n')^{-1} \in U \text{ wg. } U \trianglelefteq G, u^{-1} \in U \Rightarrow n'u(n')^{-1}u^{-1} \in U$$

$$n' \in N, u(n')^{-1}u^{-1} \in N \text{ wg. } N \trianglelefteq G \Rightarrow n'u(n')^{-1}u^{-1} \in N$$

$$\text{insg. } n'u(n')^{-1}u^{-1} \in N \cap U \xrightarrow{N \cap U = \{e\}} n'u(n')^{-1}u^{-1} = e$$

zu (2) geniesst z.zg: $\ker(\phi) \leq \{e\}$

$$\text{Sei } (n, u) \in \ker(\phi) \Rightarrow \phi(n, u) = e \Rightarrow nu = e$$

$$\Rightarrow n = u^{-1} \in N \cap U \Rightarrow n = u^{-1} = e \Rightarrow n = u = e$$

zu (3) Sei $g \in G$. $G = NU \xrightarrow{N \cap U = \{e\}} \Rightarrow \exists n \in N, u \in U$

$$g = nu \Rightarrow g = \phi(n, u)$$

□

Satz (4.25)

Seien X und Y Mengen und $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf X .

- (i) Ist $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass für alle $x, x' \in X$ aus $x \equiv x'$ jeweils $f(x) = f(x')$ gilt, dann existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung $\bar{f} : X/\equiv \rightarrow Y$ mit $\bar{f}([x]) = f(x)$ für alle $x \in X$.
- (ii) Ist $g : X \times X \rightarrow Y$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass für alle $x, x' \in X$ und $y, y' \in X$ aus $x \equiv x'$ und $y \equiv y'$ jeweils $g(x, y) = g(x', y')$ folgt, dann existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung $\bar{g} : (X/\equiv) \times (X/\equiv) \rightarrow Y$ mit $\bar{g}([x], [y]) = g(x, y)$ für alle $x, y \in X$.

Man nennt $\bar{f}$ bzw. $\bar{g}$ die durch f bzw. g induzierte Abbildung.

Beweis von Satz 4.25, aus (i)

geg. Mengen X, Y , $\equiv$ Äquivalenzrelation auf X

Abbildung $f: X \rightarrow Y$ mit $x \equiv x' \Rightarrow f(x) = f(x') \quad \forall x, x' \in X$

Beh. $\exists \bar{f}: (X/\equiv) \rightarrow Y$ mit $\bar{f}([x]) = f(x) \quad \forall x \in X$

↑ Menge der Äquiv.-kl.
von $\equiv$

Sei $R \subseteq X$ ein Repräsentantensystem der Äquiv.-kl. von $\equiv$.

Für jede $A \in X/\equiv$ setze $\bar{f}(A) = f(x_0)$, wobei x_0 das eindeutig bestimmte Element in A mit $x_0 \in R$ bezeichnet.

Sei nun $x \in X$ bel. vorgeg. z.zg. $\bar{f}([x]) = f(x)$

Sei $x_0 \in R$ das eindeutig bestimmte Element aus R in $[x]$.

$$x_0 \in [x] \Rightarrow [x] = [x_0] \Rightarrow x = x_0 \Rightarrow f(x) = f(x_0)$$

$$\text{also: } \bar{f}([x]) = f(x_0) = f(x).$$

↳ nach Def.



Bsp zu Satz 4.28

i) Es gibt keine Abbildung $f: \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
mit $f(a+3\mathbb{Z}) = a \quad \forall a \in \mathbb{Z}$

ii) Es existiert keine Abbildung $f: \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
mit $f(a+3\mathbb{Z}) = a+4\mathbb{Z} \quad \forall a \in \mathbb{Z}$

zu i) Ang., f wie angeg. existiert.

$$f(1+3\mathbb{Z}) = 1, \quad f(1+3\mathbb{Z}) = f(4+3\mathbb{Z}) = 4 \Rightarrow 1=4 \quad \downarrow$$

zu ii) Ang., f existiert. $f(1+3\mathbb{Z}) = 1+4\mathbb{Z}$

$$f(1+3\mathbb{Z}) = f(4+3\mathbb{Z}) = 4+4\mathbb{Z} = 0+4\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 0+4\mathbb{Z} = 1+4\mathbb{Z} \quad \downarrow$$

Eine Verknüpfung auf den Linksnebenklassen

Proposition (4.26)

Sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler von G . Dann gibt es auf der Menge G/N eine eindeutig bestimmte Verknüpfung $\cdot$ mit der Eigenschaft

$$(gN) \cdot (hN) = (gh)N \quad \text{für alle } g, h \in G.$$

Satz (4.27)

Sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler. Dann ist die Menge G/N der Linksnebenklassen mit der Verknüpfung $gN \cdot hN = (gh)N$ eine Gruppe, die sogenannte **Faktorgruppe** von G modulo N . Die Abbildung $\pi_N : G \rightarrow G/N$, $g \mapsto gN$ ist ein Epimorphismus von Gruppen, der sog. **kanonische Epimorphismus**.

wichtiges Beispiel: die Faktorgruppen $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

Beweis von Prop. 4.26:

geg. G Gruppe, $N \trianglelefteq G$, z.zg.:

Es existiert eine Abb. $\circ : G/N \times G/N \rightarrow G/N$
mit $(gN) \circ (hN) = (gh)N \quad \forall g, h \in G$.

Nach Satz 4.25 genügt es z.zg., dass
die Abb. $f : G \times G \rightarrow G/N, (g, h) \mapsto (gh)N$
die folgende Eigenschaft hat:

$$g \equiv g', h \equiv h' \Rightarrow f(g, h) = f(g', h'),$$

$\forall g, g', h, h' \in G$, wobei die Relation $\equiv$
auf G definiert ist durch $g \equiv g' \Leftrightarrow g' \in gN$

$$\Rightarrow gN = g'N \quad \forall g, g' \in G$$

Seien $g, g', h, h' \in G$ mit $g \equiv g', h \equiv h'$.
 $\Leftrightarrow$ z.z.g.: $f(g, h) = f(g', h')$, gleichbedeutend:

$$(gh)N = (g'h')N \Leftrightarrow g'h' \in (gh)N$$

$$g \equiv g', h \equiv h' \Rightarrow g' \in gN, h' \in hN \Rightarrow$$

$$\exists n_1, n_2 \in N \text{ mit } g' = gn_1, h' = hn_2 \Rightarrow$$

$$g'h' = gn_1 hn_2 \quad n_1 h \in Nh, N \trianglelefteq G \Rightarrow$$

$$Nh = hN \Rightarrow n_1 h \in hN \Rightarrow \exists n_3 \in N:$$

$$n_1 h = hn_3 \text{ einsetzen} \Rightarrow g'h' = gh n_3 n_2$$

$$\Rightarrow g'h' \in (gh)N \quad \square$$

Beweis von Satz 4.27:

geg. Gruppe G , $N \trianglelefteq G$

Verknüpfung $\cdot$ auf G/N mit der Eigenschaft $gN \cdot hN = (gh)N \quad \forall g, h \in G$.

z.zg: $(G/N, \cdot)$ ist eine Gruppe

dafür zu überprüfen:

(1) Assoziativgesetz von $\cdot$

(2) N ist Neutralelement in $(G/N, \cdot)$

(3) Für jedes $g \in G$ ist $g^{-1}N$ das Inverse von gN in $(G/N, \cdot)$.

$\rightarrow G/N$

$\in G$

dass

$\rightarrow (gh)N$

(g, h)

ation $\equiv$

$\Rightarrow g^{-1} \in gN$

zu (1) Seien $g, h, k \in G$. Dann gilt $(gN \cdot hN) \cdot kN =$
 $(gh)N \cdot kN = ((gh)k)N = (g(hk))N = gN \cdot (hk)N$
 $= gN \cdot (hN \cdot kN).$
 $\uparrow$ Ass.-gesetz in G

zu (2) Sei $g \in G$. z.zg. $gN \cdot N = gN$, $N \cdot gN = gN$
 $gN \cdot N = gN \cdot eN = (ge)N = gN$
 $N \cdot gN = eN \cdot gN = (eg)N = gN$
 also: $e_{G/N} = N$ ist Neutralelement in der Halbgr. $(G/N, \cdot)$

zu (3) Sei $g \in G$. z.zg. $gN \cdot g^{-1}N = e_{G/N}$, $g^{-1}N \cdot gN = e_{G/N}$
 $gN \cdot g^{-1}N = (gg^{-1})N = eN = N = e_{G/N}$
 (Bew. des zweiten l.f. analog)

Betrachte nun die Abb. $\pi : G \rightarrow G/N$, $g \mapsto gN$.

- Dies ist ein Gruppenhom., denn für alle $g, h \in G$ gilt
$$\pi(gh) = (gh)N = gN \cdot hN = \pi(g) \cdot \pi(h).$$
- Die Abbildung ist surjektiv, denn jedes Element in G/N hat die Form gN für ein $g \in G$, und es gilt $\pi(g) = gN$. $\square$

Beispiel für eine Faktorgruppe:

$$G = S_3, N = \langle (123) \rangle = \{ \text{id}, (123), (132) \}$$

$$|G/N| = (G:N) = \frac{|G|}{|N|} = \frac{6}{3} = 2$$

↑ Lagrange

$$(12)N \neq \text{id}N = N, \text{ da } (12) \notin N$$

$$\text{Wegen } |G/N| = 2 \text{ folgt } G/N = \{ N, (12)N \}$$

$\cdot$	N	$(12)N$
N	N	$(12)N$
$(12)N$	$(12)N$	N

$$N \cdot N = \text{id} \cdot N \cdot \text{id} \cdot N = (\text{id} \cdot \text{id})N = \text{id} \cdot N = N$$

$$(12)N \cdot N = (12)N \cdot \text{id}N = (\text{id} \cdot \text{id})N = (12)N$$

$$\text{Repr.-system: } \{ \text{id}, (12) \}$$

