Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. Nikita Geldhauser

24.01.2024 WiSe 2023/24

Algebraische Geometrie 1
Übungsblatt 12

Aufgabe 1.
a) Seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Beschreibe $\operatorname{Spec} K^n$.
b) Beschreibe $\operatorname{Spec} \mathbb{R}[x]$.

Aufgabe 2. Seien R ein Ring, $f \in R$ und $D(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid f \notin \mathfrak{p}\}$ eine offene Hauptmenge.
Zeige: $D(f) = \emptyset$ genau dann, wenn f nilpotent ist.

Aufgabe 3. Sei R ein Ring. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.
a) $\operatorname{Spec} R$ ist ein zusammenhängender topologischer Raum (bzgl. der Zariski-Topologie).
b) R enthält keine idempotenten Elemente $e \neq 0, 1$. Ein Element $e \in R$ heißt dabei idempotent (oder Projektor), falls $e^2 = e$ gilt.
c) Der Ring R ist nicht isomorph zum Produkt von zwei Ringen $\neq 0$.
Hinweis: Benutze ohne Beweis, dass ein Ring R genau dann ein idempotentes Element $\neq 0, 1$ besitzt, wenn $R/\sqrt{\{0\}}$ ein solches Element hat. Benutze auch ohne Beweis, dass

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p}$$

für jedes Ideal I in R.