Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. Nikita Geldhauser

17.01.2024 WiSe 2023/24

# Algebraische Geometrie 1
# Übungsblatt 11

**Aufgabe 1.** Seien $r, n \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq r \leq n$, $K$ ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K \neq 2$ und $f = x_0^2 + \ldots + x_r^2 \in K[x_0, \ldots, x_n]$.
a) Zeige: Das Polynom $f$ ist irreduzibel.

b) Seien $Q := V(f) \subset \mathbb{P}^n$ die entsprechende projektive Quadrik und $\operatorname{Sing}(Q) \subset Q$ der singuläre Ort von $Q$.
Zeige: $\operatorname{Sing}(Q)$ ist irreduzibel und $\dim \operatorname{Sing}(Q) = n - r - 1$.

**Aufgabe 2.** a) Sei $f \in K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein homogenes Polynom vom Grad $d$.
Zeige: $\sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = d \cdot f$.

b) Seien $K$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, $X \subset \mathbb{P}^n_K$ eine $r$-dimensionale projektive Varietät, $a \in X$ und $I(X) = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$, wobei alle $f_i$ homogen sind.
Zeige: $X$ ist genau dann glatt im Punkt $a$, wenn der Rang der $s \times (n+1)$-Matrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j}$ mindestens $n - r$ ist.
*Hinweis:* Benutze a).

c) Zeige mit Hilfe von b): Die Varietät $V(xz - y^2, yw - z^2, xw - yz) \subset \mathbb{P}^3$ ist glatt.

**Aufgabe 3.**
a) Seien $K$ ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K \neq 3$ und $t \in K$. Bestimme singuläre Punkte der Kurve $V(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + t(x_0 + x_1 + x_2)^3) \subset \mathbb{P}^2$ in Abhängigkeit von $t$.
b) Seien $K$ ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K = 0$ und $d, n \in \mathbb{N}$. Finde eine glatte Hyperfläche vom Grad $d$ in $\mathbb{P}^n_K$.
*Bemerkung:* Die Annahme, dass $\operatorname{char} K = 0$, ist eigentlich nicht notwendig.