Mathematisches Institut
Universität München Prof. Dr. Nikita Geldhauser
20.12.2023 WiSe 2023/24

Algebraische Geometrie 1
Übungsblatt 9

Aufgabe 1. a) In der Vorlesung haben wir gesehen, dass für jede Hyperfläche $H \subset \mathbb{A}^n$ das Komplement $\mathbb{A}^n \setminus H$ affin ist.
Sei nun H eine Hyperfläche in $\mathbb{P}^n$. Zeige: $\mathbb{P}^n \setminus H$ ist affin.
Hinweis: Eine Hyperfläche H ist durch ein homogenes Polynom vom Grad d gegeben. Zeige zunächst die Aussage für $d = 1$. Benutze dann die Veronese-Einbettung.

b) Finde mit Hilfe von a) eine neue Lösung der Aufgabe 2a) vom Übungsblatt 8.

Aufgabe 2. Sei $Y \subset \mathbb{P}^2$ eine Kurve, die durch die Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ gegeben ist. Zeige: Y ist isomorph zum Schnitt von 9 Quadriken in einem projektiven Raum.
Hinweis: Schritt 1. Zeige zunächst: Die Nullstellenmenge eines homogenen Polynoms $f(x_0, \dots, x_n)$ vom Grad m ist gleich der gemeinsamen Nullstellenmenge von $n+1$ Polynomen $x_i f(x_0, \dots, x_n)$ vom Grad $m + 1$.
Schritt 2. Schreibe Y als die gemeinsame Nullstellenmenge von 3 Polynomen in x, y, z vom Grad 4. Betrachte das Bild von Y unter der Veronese-Einbettung $v_2 \colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$. Schreibe 6 quadratische Gleichungen, die $v_2(\mathbb{P}^2)$ in $\mathbb{P}^5$ bestimmen.
Schritt 3. Folgere, dass man Y als Schnitt von $9 = 6 + 3$ Quadriken in $\mathbb{P}^5$ auffassen kann. Schreibe diese Gleichungen explizit.

Aufgabe 3. a) Sei $Y \subset \mathbb{P}^n$ das Bild der d-fachen Veronese-Einbettung $v_d \colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ mit $N = \binom{n+d}{d} - 1$. Zeige: Der Grad von Y ist d^n.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis folgende Beschreibung des Ideals $I(Y)$ benutzen. Seien $M_0, \dots, M_N$ alle Monome vom Grad d in $K[x_0, \dots, x_n]$. Das Ideal $I(Y)$ ist der Kern des Homomorphismus

$$\theta \colon K[y_0, \dots, y_N] \to K[x_0, \dots, x_n], \qquad y_i \mapsto M_i.$$

b) Sei Y das Bild der Segre-Einbettung $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s \to \mathbb{P}^{(r+1)(s+1)-1}$. Zeige: Der Grad von Y ist $\binom{r+s}{r}$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis folgende Beschreibung des Ideals $I(Y)$ benutzen. Für $N = rs + r + s$ sei $K[\mathbb{P}^N] = K[z_{ij}, i = 0, \dots, r, j = 0, \dots, s]$. Das Ideal $I(Y)$ ist der Kern des Homomorphismus

$$\psi \colon K[z_{ij}] \to K[x_0, \dots, x_r, y_0, \dots, y_s], \qquad z_{ij} \mapsto x_i y_j.$$