Mathematisches Institut | Prof. Dr. Nikita Geldhauser
Universität München | 06.12.2023 WiSe 2023/24

Algebraische Geometrie 1
Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K \neq 2$. Sei Q eine glatte projektive Quadrik von Dimension $n-1$, d.h. $Q \subset \mathbb{P}^n$ ist eine Hyperfläche, die durch eine nicht ausgeartete quadratische Form in $(n+1)$ Variablen gegeben ist.
Zeige: Q ist eine rationale Varietät (d.h. Q is birational zu $\mathbb{P}^{n-1}$).
Hinweis: Da K algebraisch abgeschlossen ist und $\operatorname{char} K \neq 2$, können wir annehmen, dass Q durch die quadratische Form $q = x_0x_1 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ gegeben ist. Betrachte die Projektion $\mathbb{P}^n \dashrightarrow \{x_0 = 0\} \subset \mathbb{P}^n$, d.h. die Abbildung $[a_0, \ldots, a_n] \mapsto [0, a_1, \ldots, a_n]$.

Aufgabe 2. Seien K ein Körper und $f_1, \ldots, f_n \in K[x_1, \ldots, x_n]$ Polynome, sodass der Morphismus

$$\varphi\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n, \qquad (a_1, \ldots, a_n) \mapsto (f_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, f_n(a_1, \ldots, a_n))$$

ein Automorphismus von $\mathbb{A}^n$ ist. Sei $J := \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ die Jacobi-Matrix.
Zeige: J ist ein konstantes Polynom ungleich 0.

Aufgabe 3. Die Umkehrung der Aussage aus der Übungsaufgabe (2) heißt die Jacobi-Vermutung. D.h. wenn J ein konstantes Polynom ungleich 0 ist, dann soll φ ein Isomorphismus sein.
(a) Finde ein Gegenbeispiel zu dieser Vermutung, wenn $\operatorname{char} K > 0$ ist.
Hinweis: Es gibt ein Gegenbeispiel für $n = 1$.
(b) Finde ein Gegenbeispiel zu dieser Vermutung, wenn $f_1, \ldots, f_n$ komplexe analytische Funktionen $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ sind.
Hinweis: Betrachte $n = 2$ und $F\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $(x, y) \mapsto (e^x, e^{-x}y)$.