Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. Nikita Geldhauser
15.11.2023 WiSe 2023/24

Algebraische Geometrie 1
Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Finde alle irreduzible Komponenten von $V(xz - y^2, x^3 - yz) \subset \mathbb{A}^3_K$.

Aufgabe 2. Seien K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $X \subset \mathbb{A}^n_K$ eine affine Varietät von Dimension $n-1$.
Zeige: $X = V(f)$ für ein nicht-konstantes irreduzibles Polynom $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$.
Hinweis: Benutze ohne Beweis folgenden Satz aus der kommutativen Algebra: Sei R ein Noetherscher Integritätsbereich. Dann ist A genau dann ein faktorieller Ring, wenn jedes Primideal in A von Höhe 1 ein Hauptideal ist.

Aufgabe 3. Gebe einen geometrischen Beweis des Satzes von Cayley–Hamilton. Folge dabei die folgenden Schritte.
Schritt 1. Zeige, dass der Satz für diagonale Matrizen gilt.
Schritt 2. Zeige, dass der Satz für diagonalisierbare Matrizen gilt.
Schritt 3. Zeige, dass es genügt den Satz für Matrizen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper zu zeigen.
Schritt 4. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Identifiziere die Menge aller $n \times n$ Matrizen über K mit $\mathbb{A}^{n^2}_K$.
Zeige: Die Menge aller $n \times n$ Matrizen mit paarweise verschiedenen Eigenwerten ist dicht in $\mathbb{A}^{n^2}_K$ in Zariski-Topologie.
Hinweis: Benutze Diskriminanten von Polynomen.
Schritt 5. Sei $f \in K[x_1, \ldots, x_N]$. Zeige, dass die assoziierte Abbildung

$$\tilde{f}\colon \mathbb{A}^N_K \to \mathbb{A}^1_K, \qquad (a_1, \ldots, a_N) \mapsto f(a_1, \ldots, a_N)$$

in der Zariski-Topologie stetig ist.
Schritt 6. Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen.
Zeige: Für jede Teilmenge $A \subset X$ gilt $\overline{f(\overline{A})} = \overline{f(A)}$.
Schritt 7. Beende den Beweis des Satzes von Cayley–Hamilton.