LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Nikita Geldhauser

Wintersemester 2023/24
08.02.2024

# Algebraische Geometrie 1

## Klausur

Nachname: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnr.: ______________________ Fachsemester: ______________________

Abschluss: Bachelor, PO ❑ 2011 ❑ 2015 ❑ 2021 Master, PO ❑ 2011 ❑ 2021

Lehramt Gymnasium: ❑ modularisiert ❑ nicht modularisiert

❑ Diplom ❑ Anderes: ______________________

Hauptfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ________

Nebenfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❑ Hauptfach ❑ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Lichtbild- und Studienausweis sichtbar auf den Tisch.
Bitte überprüfen Sie, ob Sie **fünf Aufgaben** erhalten haben.
Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**.
Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe.
Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

Viel Erfolg!

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|
| /5 | /14 | /9 | /8 | /14 | /50 |

Name: ______________________________

**Aufgabe 1.** [5 Punkte]

Seien $f = xy^3 - x^2$ und $g = x^3y^2 - y$ Polynome in $\mathbb{C}[x, y]$.
Beweise oder widerlege: Diese Polynome bilden eine Gröbnerbasis des Ideals $\langle f, g\rangle$ bzgl. deglex mit $x > y$.

$$S(f,g) = \frac{x^3y^3}{xy^3} \cdot f - \frac{x^3y^3}{x^3y^2} \cdot g = -x^4 + y^2$$

S-Polynom

$$x^3y^3 = \mathrm{lcm}(\underset{xy^3}{\underset{\shortparallel}{LM(f)}}, \underset{x^3y^2}{\underset{\shortparallel}{LM(g)}})$$

$S(f,g) \; \big|\underline{\;f, g\;}$

Rest $\neq 0$ $\Rightarrow$ keine Gröbnerbasis

Name: ________________________________________

**Aufgabe 2.** [5+9 Punkte]

a) Geben Sie ein Beispiel einer Varietät über dem Körper $\mathbb{C}$ an, die unendlich viele singuläre Punkte hat. Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

b) Geben Sie ein Beispiel einer glatten affinen Varietät $X \subset \mathbb{A}^n$ über $\mathbb{C}$ an (die Zahl $n$ können Sie konkret wählen), sodass der projektive Abschluss $\overline{X} \subset \mathbb{P}^n$ singulär ist. Geben Sie dabei die Gleichungen für $X$ und $\overline{X}$ explizit an und vergessen Sie nicht zu prüfen, dass Ihr $X$ irreduzibel ist. Bitte begründen Sie Ihre Antwort.
*Hinweis zu b):* Es gibt ein Beispiel für $n = 2$.

a) z.B. $V(x_0^2 + \ldots + x_r^2) \subset \mathbb{P}^n$ mit $2 \leq r < n$

b) z.B. $n = 2$, $X = V(xy^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2$

glatt, da $\mathrm{Jac} = (y^2 \quad 2xy) = (0, 0)$

$\Downarrow$

$y = 0$

Aber $(*, 0) \notin V(xy^2 - 1)$

$\overline{X} = V(xy^2 - z^3) \subset \mathbb{P}^2$

$\mathrm{Jac} = (y^2 \quad 2xy \quad -3z^2) = (0 \quad 0 \quad 0) \Leftrightarrow y = z = 0$, $x$ bel.

$\Rightarrow [1, 0, 0] \in \overline{X}$ ist ein singulärer Punkt

Name: ______________________________

**Aufgabe 3.** [9 Punkte]

Seien $d, n \in \mathbb{N}$ und

$$0 \neq f = \sum_{\substack{(i_0,i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1} \\ i_0+i_1+\dots+i_n=d}} a_{i_0 i_1 \dots i_n} x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

ein homogenes Polynom in $\mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ vom Grad $d$. Das Polynom $f$ können wir als einen Punkt in $\mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$ mit Koordinaten $a_{i_0 i_1 \dots i_n} \in \mathbb{C}$ auffassen (z.B. in der lexikographischen Ordnung).

Sei nun $X = \{f \in \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1} \mid V(f) \text{ glatt}\} \subset \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$, wobei $V(f) \subset \mathbb{P}^n$ die Nullstellenmenge des Polynoms $f$ bezeichnet.

Zeige: $X$ ist dicht in $\mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$.

*Hinweis:* Betrachten Sie die abgeschlossene Teilmenge $Y := \{(f, p) \in \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1} \times \mathbb{P}^n \mid f(p) = 0\}$ von $\mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1} \times \mathbb{P}^n$. Ferner können Sie den Satz aus der Vorlesung benutzen, dass für jeden Morphismus $\varphi\colon V \to W$ zwischen zwei projektiven algebraischen Mengen das Bild $\varphi(V)$ in $W$ abgeschlossen ist.

$N := \binom{n+d}{d} - 1$

$Y = \{(f, p) \in \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^n \mid f(p) = 0\} \hookrightarrow \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^n$

abgeschlossen, da polynomielle Gleichungen

$T := \{(f, p) \in Y \mid f(p) = 0, \ \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0 \ \forall i = 0, \dots, n\} \hookrightarrow Y$

Betrachte $T \xrightarrow{pr_1} \mathbb{P}^N$, $(f,p) \mapsto f$ die erste Projektion $\Rightarrow$ $\operatorname{Im} pr_1 \hookrightarrow \mathbb{P}^N$

T projektiv

__Beh__ $X \supset \underbrace{\mathbb{P}^N \setminus \operatorname{Im} pr_1}_{\text{offen \& nicht leer (z.B. } \sum_{i=0}^n x_i^d \notin \operatorname{Im} pr_1)}$ & $\left(\Rightarrow \overline{X} = \mathbb{P}^N\right.$, da $\mathbb{P}^N$ irreduzibel ist$\left.\right)$

Sei $f \in \mathbb{P}^N \setminus \operatorname{Im} pr_1$

Angenommen $V(f)$ ist singulär $\Rightarrow \exists\, p \in \mathbb{P}^n$ mit $\underbrace{f_1(p) = 0}_{\Downarrow \atop f(p)=0}$ & $\underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(p) = 0 \ \forall i}_{\Downarrow \atop \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0 \ \forall i}$

$V(f) = V(\sqrt{(f)})$, $\sqrt{(f)} = (f_1)$ ein homogener Teiler von $f$

$\Rightarrow (f, p) \in T \Rightarrow f \in \operatorname{Im} pr_1$. Widerspruch

Name: ______________________________

**Aufgabe 4.** [8 Punkte]

Seien $A$ und $B$ kommutative Ringe und $f\colon B \to A$ ein Ringhomomorphismus.
Sei $f^*\colon \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} B$ der induzierte Morphismus mit $f^*(\mathfrak{p}) := f^{-1}(\mathfrak{p})$ für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$.
Zeige: $f^*$ ist ein dominanter Morphismus (d.h. definitionsgemäß, dass $f^*(\operatorname{Spec} A)$ in $\operatorname{Spec} B$ dicht ist) genau dann, wenn $\operatorname{Ker} f \subset \sqrt{(0)} \subset B$.
*Hinweis:* Sie dürfen folgende Formel ohne Beweis benutzen: Für alle Ideale $I$ von $A$ gilt

$$V(f^{-1}(I)) = \overline{f^*(V(I))},$$

wobei standardmäßig für einen kommutativen Ring $R$ und eine Teilmenge $J \subset R$ die Menge $V(J) \subset \operatorname{Spec} R$ als $\{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R \mid J \subset \mathfrak{q}\}$ definiert ist.

$$V(f^{-1}(I)) = \overline{f^*(V(I))} \quad \forall\ I \lhd A$$

Nehme $I = 0 \Rightarrow \quad V(\operatorname{Ker} f) = \overline{f^*(V(0))} = \overline{f^*(\operatorname{Spec} A)}$

$f^*$ dominant $\Leftrightarrow V(\operatorname{Ker} f) = \operatorname{Spec} B \Leftrightarrow \forall\, q \in \operatorname{Spec} B \quad q \supset \operatorname{Ker} f$

$\Updownarrow$

$\operatorname{Ker} f \subset \bigcap_{q \in \operatorname{Spec} B} q = \sqrt{(0)}$

Name: ____________________

**Aufgabe 5.** [5+9 Punkte]

a) Berechne das Hilbert-Polynom des homogenen Ideals $\langle x^2y^3, y^4\rangle \lhd \mathbb{C}[x,y]$.

b) Seien $K$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $I$ ein homogenes Ideal im Ring $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. Ferner sei $S := K[x_0, x_1, \ldots, x_n]/I = \oplus_{i\geq 0} S_i$ der entsprechende graduierte Ring.

Die Poincaré-Reihe $HR(t)$ von $S$ ist definiert als $HR(t) := \sum_{i\geq 0} HF(i)t^i$ mit $HF(i) := \dim_K(S_i)$ (die Hilbert-Funktion von $S$).
Nach der Vorlesung kann man die Poincaré-Reihe $HR(t)$ von $S$ als $\frac{A(t)}{(1-t)^d}$ schreiben, wobei $d \geq 0$ und $A(t) \in \mathbb{Z}[t]$ mit $A(1) \neq 0$. Ferner existiert ein Polynom $HP(s) \in \mathbb{Q}[s]$ (das Hilbert-Polynom), sodass $HF(i) = HP(i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$, die groß genug sind.
Sei nun $d \geq 1$.
Zeige: $HP(s) = \frac{A(1)}{(d-1)!}s^{d-1}$ + Terme mit kleinerem Grad von $s$.
*Hinweis:* Es gilt: $HR(t) = A(t) \cdot \left(\sum_{m\geq 0} \binom{m+d-1}{d-1} t^m\right)$.
Schreiben Sie $A(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_e t^e$ mit $a_i \in K$ und benutzen Sie die Formel: $\binom{l+d-1}{d-1} = \frac{(l+d-1)(l+d-2)\ldots(l+1)}{(d-1)!}$.

a) $$\mathbb{C}[x,y]_d / \langle x^2y^3, y^4\rangle_d \underset{d \gg 0}{=} {}_{\mathbb{C}}\langle x^d, yx^{d-1}, y^2x^{d-2}\rangle$$

$\Rightarrow HP(s) \equiv 3.$

b) $$HR(t) = \frac{A(t)}{(1-t)^d} \underset{\uparrow \text{ Taylor-Reihe}}{=} A(t)\cdot\left(\sum_{m\geq 0}\binom{m+d-1}{d-1}t^m\right), \quad A(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_e t^e$$

$$= (a_0 + a_1 t + \ldots + a_e t^e)\cdot\left(\sum_{m\geq 0}\binom{m+d-1}{d-1}t^m\right) =$$

$$= \sum_{l\geq 0} t^l \cdot \Big(\underbrace{\sum_{i=0}^{e} a_i \cdot \binom{(l-i)+d-1}{d-1}}_{(l = i+m \Rightarrow m = l-i)}\Big) \quad = HF(l)$$

$$\binom{(l-i)+d-1}{d-1} \underset{\substack{\uparrow \\ l \gg 0 \\ (\text{genauer: } l \geq e-d+1)}}{=} \frac{1}{(d-1)!}(l-i)^{d-1} + \text{kleinere Potenzen von } (l-i) =$$

$i = 0, \ldots, e$

$$= \frac{1}{(d-1)!} l^{d-1} + \text{kleinere Potenzen von } l$$

$$\Rightarrow HP(l) \underset{l\gg 0}{=} HF(l) \underset{l \gg 0}{=} \sum_{i=0}^{e} a_i \left(\frac{1}{(d-1)!} + \text{kleinere Potenzen von } l\right) =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ A(1) = \sum_{i=0}^{e} a_i}}{=} \frac{A(1)}{(d-1)!} l^{d-1} + \text{kleinere Terme}$$