Mathematisches Institut Universität München

Prof. Dr. Nikita Geldhauser

10.07.2024 SoSe 2024

Algebraische Geometrie 2
Übungsblatt 12

Aufgabe 1. (a) Sei A ein Hauptidealring.
Zeige: $\operatorname{Pic}(\operatorname{Spec} A) = 0$. Folgere daraus, dass $\operatorname{Pic}(\mathbb{G}_m) = 0$ ist, wobei $\mathbb{G}_m = \mathbb{A}^1_k \setminus \{0\}$ und k ein Körper ist.
Hinweis: Untersuche endlich erzeugte projektive Moduln über A.
(b) Sei X die Gerade mit doppeltem Punkt aus Blatt 7, Aufgabe 3.
Zeige: $\operatorname{Pic}(X) = \mathbb{Z}$.
Hinweis: Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter topologischer Raum. Definiere eine Garbe $\mathcal{O}^*_X$ von abelschen Gruppen auf X als $\mathcal{O}^*_X(U) := \mathcal{O}_X(U)^*$ für alle offenen $U \subset X$, wobei $\mathcal{O}_X(U)^*$ als Gruppe (bzgl. der Multiplikation) der invertierbaren Elemente in $\mathcal{O}_X(U)$ aufgefasst wird. Benutze ohne Beweis, dass $\operatorname{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}^*_X)$ gilt.

Aufgabe 2. Seien $f(x_0, x_1, x_2)$ ein beliebiges homogenes Polynom vom Grad d und X ein Unterschema von $\mathbb{P}^2_k$ über einem Körper k, das durch $f = 0$ gegeben ist.
Zeige: $\dim H^0(X, \mathcal{O}_X) = 1$ und $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ (arithmetisches Geschlecht von X).

Aufgabe 3. Seien k ein Körper, $X = \mathbb{A}^2_k = \operatorname{Spec} k[x, y]$ und $U = X \setminus \{(0, 0)\}$.
Zeige: $H^1(U, \mathcal{O}_U)$ ist isomorph zu k-Vektorraum mit Basis $\{x^i y^j \mid i, j < 0\}$. Folgere daraus, dass U nicht affin ist.

Aufgabe 4. Seien X ein topologischer Raum, $x \in X$, G eine abelsche Gruppe und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X, die wie folgt definiert ist: für alle offenen Teilmengen U von X ist $\mathcal{F}(U) = G$, falls $x \in U$, und $\mathcal{F}(U) = 0$ sonst.
Berechne $H^i(X, \mathcal{F})$ für alle i.