

## Einführung in die Zahlentheorie, Klausur

**Aufgabe 1** Man zeige: Für alle ganzen Zahlen  $n$  gilt

$$42 \mid n^7 - n.$$

**Aufgabe 2** Man bestimme alle Lösungen  $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  der Gleichung

$$8x + 13y = 2.$$

**Aufgabe 3** Man bestimme die Anzahl der erzeugenden Elemente folgender multiplikativer Gruppen:

$$(1) (\mathbb{Z}/169)^*, \quad (2) \mathbb{F}_{169}^*, \quad (3) \mathbb{F}_{211}^*.$$

**Aufgabe 4** Seien  $p$  und  $q$  ungerade Primzahlen mit  $p = 4q + 1$ . Man beweise:

a)  $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$ .

b) 2 ist Primitivwurzel modulo  $p$ .

**Aufgabe 5** Sei  $p$  eine Primzahl  $\geq 5$ . Man betrachte die Kongruenz

$$3x^2 \equiv 2 \pmod{p}.$$

a) Man beweise: Die Lösbarkeit der Kongruenz hängt nur von  $p \pmod{24}$  ab.

b) Man zeige, dass die Kongruenz für  $p \equiv 19 \pmod{24}$  lösbar ist und bestimme alle Lösungen für  $p = 19$ .

c) Ist die Kongruenz für  $p \equiv 17 \pmod{24}$  lösbar?