LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Wintersemester

H. Donder, A. Fackler, P. Garcia

Analysis III Tutorium

Blatt 9. Lösungskizze

Aufgabe 9.1. Seien $f_1, ..., f_n: A \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x_1, ..., x_n) = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_n(x_1, ..., x_n))$. Sei $\omega := f_1 dx_1 + ... + f_n dx_n$. Man merkt, dass für $i \in \{0, ..., k-1\}$ und $t \in (a_i, a_{i+1})$,

$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} D_1\gamma(t) \\ \vdots \\ D_n\gamma(t) \end{pmatrix}$. Deswegen:

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} [f_1(\gamma(t)) dx_1 + ... + f_n(\gamma(t)) dx_n] \cdot \gamma'(t) dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_1(\gamma(t)) dx_1(\gamma'(t)) + ... + f_n(\gamma(t)) dx_n(\gamma'(t)) dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_1(\gamma(t)) D_1\gamma(t) + ... + f_n(\gamma(t)) D_n\gamma(t) dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} < (f_1(\gamma(t)), ..., f_n(\gamma(t))), (D_1\gamma(t), ..., D_n\gamma(t)) > dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} < (F(\gamma(t)), \gamma'(t)) > dt = \int_\gamma F(x) \cdot ds$$

Aufgabe 9.2. Man merkt, dass $\nabla f(x) = (D_1 f(x), ..., D_n f(x))$ und deswegen, für $\omega := f' = D_1 f dx_1 + ... + D_n f dx_n$, nach Aufgabe 9.1, $\int_\gamma \nabla f(x) \cdot dx = \int_\gamma \omega$. (*)

Auf der andere Seite, ω ist eine 1-Form mit Stammfunktion f und deswegen, nach Theorem der Vorlesung, $\int_\gamma \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$. (**)

Nach (*) und (**) folgt die Behauptung.

Aufgabe 9.3. Sei $F = (f_1, f_2, f_3)$ und $\omega := f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$. Dann ist ω eine stetige 1-Form so dass für jede geschlossene Integrationskurve $\gamma: [a, b] \longrightarrow A$, $\int_\gamma \omega \underset{\text{Aufgabe 9.1}}{=} \int_\gamma F \cdot ds = 0$. Deswegen, nach Theorem der Vorlesung ω besitzt eine Stammfunktion $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, d.h., $\omega = df = D_1 f dx_1 + D_2 f dx_2 + D_3 f dx_3$. Aber das bedeutet

$D_1 f = f_1$, $D_2 f = f_2$, $D_3 f = f_3$ und so $\nabla f = F$. Deshalb $\operatorname{rot} F = \operatorname{rot} \nabla f = 0$.

Aufgabe 1.4. Sei ω die 1-Form $\omega := y dx + (z \cdot \cos(yz) + x) dy + (y \cdot \cos(yz)) dz$. Nach dem Beweiss von Aufgabe 9.3, wenn ω eine Stammfunktion f besitzt, dann $\nabla f = F$. Es genügt also eine Stammfunktion f von ω zu geben.

Sei $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ und $\gamma: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = t(x, y, z)$. Falls ω eine Stammfunktion hätte, das wäre

$f(x, y, z) := \int_\gamma \omega = \int_0^1 \omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^1 tyx + (tz \cdot \cos(t^2 yz) + tx) y + ty \cdot \cos(t^2 yz) z \, dt =$

$$= \int_0^1 (tyx)dt + \int_0^1 (tzy \cdot \cos(t^2 yz)dt + \int_0^1 (txy)dt + \int_0^1 (tyz \cdot \cos(t^2 yz))dt =$$

$$= 2\int_0^1 (tyx)dt + 2\int_0^1 (tzy \cdot \cos(t^2 yz)dt = \int_0^1 (2tyx)dt + \int_0^1 (2tzy \cdot \cos(t^2 yz)dt =$$

$$= [t^2\, yx]_0^1 + \int_0^{yz} \cos(u)du = yx + \sin(yz) - \sin(0) = yx + \sin(yz).$$

Aber $df = ydx + (x + z \cdot \cos(yz))dy + y \cdot \cos(yz) = \omega$, also f ist tatsächlich Stammfunktion von ω.