LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN | MATHEMATISCHES INSTITUT

Wintersemester

H. Donder, A. Fackler, P. Garcia

Analysis III Tutorium

Blatt 9

Definition 1. *Seien A offen und $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ mit $a := a_0 < a_1 \ldots < a_{k-1} < b := a_k$.*
Seien $F\colon A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld und $\gamma\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow A$ eine stetige Kurve, so dass für jede $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$ stetig differenzierbar ist.

Das Wegintegral von F entlang γ wird als $\int_\gamma F \cdot ds := \sum_{i=0}^{k-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} < F(\gamma(t)),\ \gamma'(t) > dt$ definiert.

Aufgabe 9.1. Seien A, $a = a_0, \ldots, a_k = b$, $F\colon A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ und $\gamma\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow A$ wie in Definition 1. Zeigen Sie, dass es eine 1-Form ω gibt mit $\int_\gamma \omega = \int_\gamma F \cdot ds$.

Aufgabe 9.2. Seien $A \subset \mathbb{R}^n$ offen und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Seien $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\gamma\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow A$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass $\int_\gamma \nabla f \cdot ds = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

Aufgabe 9.3. Sei $A \subset \mathbb{R}^3$ offen und zusammenhängend und sei $F\colon A \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld so dass für jede geschlossene Integrationskurve $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow A$, $\int_\gamma F \cdot ds = 0$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{rot} F = 0$.

Aufgabe 9.4. Sei $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch $F(x,y,z) = (y, z \cdot \cos(yz) + x, y \cdot \cos(yz))$. Geben Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\nabla f = F$.