Prof. Dr. H.-D. Donder

Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011

10. Januar 2011

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Lösungsskizze zu Tutorium 8

Aufgabe 1: Da die x-Achse eine Nullmenge ist, genügt es, die Fläche der Menge

$$A = \{c \cdot f(t) \mid c \in (0,1), t \in (0,\pi)\}$$

zu bestimmen. Diese enthält genau die Punkte $(s\cos(t), s\sin(t))$ mit $0 < s < e^t$ und $0 < t < \pi$. Die Darstellung in Polarkoordinaten liefert also einen Diffeomorphismus

$$\varphi : B \to A, \varphi(s,t) = (s\cos(t), s\sin(t))$$

von $B = \{(s,t) \in \mathbb{R} \times (0,\pi) \mid 0 < s < e^t\}$ nach A. Nach dem Transformationssatz gilt:

$$v(A) \quad = \quad \int_A 1 \,\mathrm{d}(x,y) = \int_B s \,\mathrm{d}(s,t) = \int_0^\pi \int_0^{e^t} s \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{e^{2t}}{2} \,\mathrm{d}t = \left.\frac{e^{2t}}{4}\right|_0^\pi = \frac{e^{2\pi}-1}{4}$$

Aufgabe 2: Bekanntermaßen ist $c_0 = \pi$ und $c_1 = -\cos x|_0^\pi = 2$.

Im Fall $n > 1$ spalten wir einen Faktor $\sin x$ ab und integrieren partiell:

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^\pi \sin^n x \,\mathrm{d}x = -\cos x \sin^{n-1} x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x)(n-1)\sin^{n-2} x \cos x \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi (n-1)\cos^2 x \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x = (n-1)\int_0^\pi (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x \\ &= (n-1)(c_{n-2} - c_n) \end{aligned}$$

Also ist $c_n = \frac{n-1}{n} c_{n-2}$. Für gerade n folgt daher mit Induktion

$$c_n = \pi \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n} = \pi \prod_{m=1}^{n/2} \frac{2m-1}{2m}$$

und für ungerade n:

$$c_n = 2\frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1)}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n} = 2 \prod_{m=1}^{(n-1)/2} \frac{2m}{2m+1}$$

Aufgabe 3: Für $t \in [-1,1]$ ist $(K_n)_t = \{(x_1,\dots,x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid x_1^2 + \dots x_{n-1}^2 \leq 1-t^2\} = \sqrt{1-t^2} \cdot K_{n-1}$. Wendet man etwa den Transformationssatz auf $x \mapsto (1-t^2)x$ an, erhält man $v(\sqrt{1-t^2}K_{n-1}) = \sqrt{1-t^2}^{n-1} v(K_{n-1}) = \sqrt{1-t^2}^{n-1} V_{n-1}$. Nach dem Satz von Fubini ist also für $n > 2$:

$$V_n = \int_{-1}^{1} v((K_n)_t)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}^{n-1} V_{n-1}\,\mathrm{d}t = V_{n-1} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}^{n-1}\,\mathrm{d}t$$

Um nun Aufgabe 2 anwenden zu können, substituieren wir t durch $-\cos s$:

$$V_n = V_{n-1} \int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos^2 s}^{n-1} \sin s\,\mathrm{d}s = V_{n-1} \int_0^{\pi} \sin^n s\,\mathrm{d}s = V_{n-1} c_n$$

Es ist aber $c_n c_{n-1} = \frac{2\pi}{n}$, also $V_n = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}$. Mit $V_1 = v([-1,1]) = 2$ und $V_2 = \pi$ erhalten wir nach Induktion:

$$\begin{aligned} V_{2m} &= \frac{2^m \pi^m}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2m} = \frac{\pi^m}{m!} \\ V_{2m+1} &= \frac{2^m \pi^m}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m+1)} \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Jedes Intervall ist Vereinigung abzählbar vieler offener Intervalle. Es ist also jede Menge $f^{-1}[I]$ mit einem Intervall I die Vereinigung abzählbar vieler $f^{-1}[J_k]$ mit offenen Intervallen J_k. Es genügt also zu zeigen, dass $f-1[I]$ für offene Intervalle I messbar ist, dass also $f^{-1}[I] \cap K$ für jedes kompakte K integrierbar ist. Sei also $I = (a,b)$.

$\mathbf{1}_K \cdot \min\{1, \max\{0, n \cdot (f - a\mathbf{1}_K)\}\}$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ integrierbar. Außerdem ist die Folge monoton wachsend und konvergiert punktweise gegen $\mathbf{1}_{K \cap f^{-1}((a,\infty))}$. Nach dem Satz von Levi ist also $K \cap f^{-1}((a,\infty))$ integrierbar. Ebenso zeigt man, dass $K \cap f^{-1}((-\infty,b)) = K \cap (-f)^{-1}((-b,\infty))$ integrierbar ist. $f^{-1}[I] \cap K$ ist der Durchschnitt dieser beiden Mengen.