LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Sommersemester 2010

H. Donder, A. Fackler, P. Garcia

Analysis III Tutorium 7

Lösungskizze

Aufgabe 7.1.

Seien $I := [0, \infty)$ und $f\colon I \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $f(x,t) := e^{-tx}$. Dann für jede $t > 0$ die Funktion $x \longmapsto f(x,t)$ ist integrierbar auf I mit
$\int_I f(x,t)dx = \int_I e^{-tx}dx = \int_0^\infty e^{-tx}dx = \operatorname*{Lim}_{k\longrightarrow\infty} \int_0^k e^{-tx}dx = \operatorname*{Lim}_{k\longrightarrow\infty} [-\frac{1}{t}e^{-tx}]_0^k = \frac{1}{t}.$ (#)

Sei $F\colon (\frac{1}{2}, 2) \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $F(t) := \int_I e^{-tx}dx \underset{\text{nach }\#}{=} t^{-1}$. F ist unendlichmal differenzierbar mit

$(-1)\cdot 1 \cdot t^{-2} = \frac{d}{dt}F(t) = \frac{d}{dt}\int_I e^{-tx}dx \underset{\text{nach (*)}}{=} \int_I \frac{\partial}{\partial t}e^{-tx}dx = (-1)\int_I xe^{-tx}dx;$

$(-1)^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot t^{-3} = \frac{d^2}{dt^2}F(t) = \frac{d}{dt}(-1)\int_I xe^{-tx}dx \underset{\text{nach (*)}}{=} (-1)\int_I \frac{\partial}{\partial t}xe^{-tx}dx = (-1)^2 \int_I x^2e^{-tx}dx;$

... inductiv ...

$(-1)^n \cdot n! \cdot t^{-(n+1)} = \frac{d^n}{dt^n}F(t) = \frac{d}{dt}(-1)^{n-1}\int_I x^{n-1}e^{-tx}dx \underset{\text{nach (*)}}{=} (-1)^{n-1}\int_I \frac{\partial}{\partial t}x^{n-1}e^{-tx}dx =$

$= (-1)^n \int_I x^n e^{-tx}dx.$

Deswegen $(-1)^n \cdot n! = \frac{d^n}{dx^n}F(1) = (-1)^n \int_I x^n e^{-x}dx$. Also $n! = \int_I x^n e^{-x}dx = \int_0^\infty x^n e^{-x}dx$.

(*)

Sei $n \geqslant 1$. Für jede $x \in I$, die Funktion $(\frac{1}{2}, 2) \ni t \longmapsto x^n e^{-tx}$ ist stetig differenzierbar und für jede $t > 0$, die Funktion $I \ni x \longmapsto x^n e^{-tx}$ ist integrierbar. Ausserdem,
$\forall x \in I. \forall t \in (\frac{1}{2}, 2). x^n e^{-tx} \leqslant x^n e^{(-x/2)}$ und die Funktion $h_n\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, $h_n(x) := x^n e^{(-x/2)}$ ist integrierbar. Deswegen, nach §14 Satz 5, die Funktion
$(\frac{1}{2}, 2) \ni t \longmapsto \int_I x^n e^{-tx}$ ist differenzierbar mit Ableitung $\int_I \frac{\partial}{\partial t}x^n e^{-tx}dx = (-1)\int_I x^{n+1}e^{-tx}dx$.

Aufgabe 7.2.

i. $\mu(\emptyset) = \int_\emptyset f dx = \int f \cdot 1_\emptyset dx = \int 0 dx = 0$

ii. Sei $E \in A$. Da $f \geqslant 0$, dann $f \cdot 1_E \geqslant 0$ und deswegen $\mu(E) = \int_E f dx = \int f \cdot 1_E\, dx \geqslant \int 0\, dx = 0$.

iii. Sei $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Folge von paarweise disjunkte Mengen in A und $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Für jede $n \in \mathbb{N}$, seien $B_n := \bigcup_{0\leqslant i\leqslant n} E_i$ und $g_n := f \cdot 1_{B_n} = \sum_{i=0}^n f \cdot 1_{E_i}$. Dann sind für jede $n, i \in \mathbb{N}$ die Funktionen $g_n = f \cdot 1_{B_n}$ und $f \cdot 1_{E_i}$ integrierbar (nach §14, Satzt 6). Ausserdem für beliebig $n \in \mathbb{N}$, da $g_n = f \cdot 1_{B_n} \leqslant f$, folgt
$\int g_n dx = \int f \cdot 1_{B_n} dx \leqslant \int f dx \underset{\text{Da } f \text{ integrierbar}}{=} \|f\|_1 \underset{\text{Da } f \text{ integrierbar}}{<} \infty.$ (*)

(*) zeigt dass $(\int g_n dx)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Aber $(g_n)_n$ ist eine monoton wachsende Folge; deswegen, nach Satz von Levi, die Funktion $f\cdot 1_E = \operatorname*{Lim}_{n\longrightarrow\infty} g_n$ (punktweise Limmes) ist integrierbar (das wussten wir schon) mit $\mu(E)=\int_E f dx = \int f\cdot 1_E dx = \operatorname*{Lim}_{n\longrightarrow\infty}\int g_n dx =$ $\operatorname*{Lim}_{n\longrightarrow\infty}\int f\cdot 1_{B_n} dx = \operatorname*{Lim}_{n\longrightarrow\infty}\int \sum_{i=0}^n f\cdot 1_{E_i} dx = \operatorname*{Lim}_{n\longrightarrow\infty}\sum_{i=0}^n \int f\cdot 1_{E_i} dx = \operatorname*{Lim}_{n\longrightarrow\infty}\sum_{i=0}^n \int_{E_i} f dx =$ $\operatorname*{Lim}_{n\longrightarrow\infty}\sum_{i=0}^n \mu(E_i) = \sum_{i=0}^\infty \mu(E_i)$.

Aufgabe 7.3.

1.

Es ist klar dass $(f_n)_{n\geqslant 1}$ monoton fallend ist.

Sei $\varepsilon>0$. Sei $N\in\mathbb{N}$ so dass $\frac{1}{N}<\varepsilon$. Dann $\forall n\geqslant N.\forall x\in\mathbb{R}.|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{N}<\varepsilon$. Dieses zeigt dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmässig gegen 0.

Keine Widerspruch zum Levis theorem, da $\|f_n\|_1=\infty$, d.h. die Funktionen f_n sind nicht integriergar (bezüglich unsere definition von integrierbarkeit).

Bemerkung: Es ist möglich Levis theorem für eine monoton wachsende Folge von messbare Funktionen $f_n\colon \Omega\longrightarrow\overline{\mathbb{R}^+}$ zu beweissen, **ohne** zu verlangen dass $(\int f_n dx)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Unsere vorherige Beispiel zeigt, dass für monoton fallende Folgen solche Theorem nicht gibt.

2.

Es ist leicht zu zeigen dass $(g_n)_{n\geqslant 1}$ gleichmässig gegen 0 konvergiert (analog wie in 1.). Ausserdem, die Funktionen g_n sind integrierbar mit $\forall n\in\mathbb{N}.\int g_n dx = 1$. Aber die Funktionen g_n sind weder monoton wachsend noch fallend: Für jede $n\geqslant 1$,
$g_n(n)=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=g_{n+1}(n)$ und $g_n(n+1)=0<\frac{1}{n+1}=g_{n+1}(n+1)$. Keine Widerspruch zum Levis theorem.

Aufgabe 7.4.

Sei $y\in\mathbb{R}^+$ beliebig. Mit der Substitution $t=xy$, wir haben $dt=ydx$ und deswegen, nach der Substitutionregel folgt $\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\int_0^\infty ye^{-(xy)^2}dx=\int_0^\infty ye^{-x^2y^2}dx.$ (*)

Sei $a:=\int_0^\infty e^{-x^2}dx$. Dann

$$a^2=a\cdot a=\int_0^\infty e^{-x^2}dx\cdot\int_0^\infty e^{-y^2}dy=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)e^{-y^2}dy \underset{\text{nach (*)}}{=}$$

$$=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty ye^{-x^2y^2}dx\right)e^{-y^2}dy=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-y^2}ye^{-x^2y^2}dx\right)dy=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty ye^{-y^2-x^2y^2}dxdy \underset{\text{Fubini-Tonelli}}{=} \int_0^\infty\int_0^\infty ye^{-y^2-x^2y^2}dydx \underset{\text{Hauptsatz Analysis I}}{=}$$

$$=\int_0^\infty\left[\frac{e^{-y^2-x^2y^2}}{-2(1+x^2)}\right]_0^\infty dx=\int_0^\infty\frac{1}{2(1+x^2)}dx=\frac{1}{2}[\arctan(x)]_0^\infty=\frac{\pi}{4}.$$

Deswegen $a=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.