Prof. Dr. H.-D. Donder
Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011
7. Dezember 2010

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Lösungsskizze zu Tutorium 6

Aufgabe 1: Da für $(x,y,z) \in A$ gilt, dass $x^2+y^2+z^2 \leq x^2+y^2+x^2+z^2 \leq 2$, ist A beschränkt. Außerdem ist A abgeschlossen, also kompakt und damit integrierbar. Für $x \in [-1,1]$ ist $A_x = [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]^2$, also:

$$v(A) = \int_{-1}^{1} v(A_x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (2\sqrt{1-x^2})^2 \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (4-4x^2)\mathrm{d}x = 4x - \frac{4}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

Aufgabe 2: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist f auf $[-k,k]^n$ integrierbar. Insbesondere ist auch $|f|$ auf $[-k,k]^n$ integrierbar, also die Menge A_k der $x \in [-k,k]^n$ mit $|f(x)| = \infty$ eine Nullmenge. Die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen ist wieder ein Nullmenge und $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$.

Aufgabe 3: Sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt. Dann ist K beschränkt, also gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass K die Quader P_k und Q_k für $k > N$ nicht schneidet. Das heißt,

$$\mathbf{1}_K \cdot f = \mathbf{1}_K \cdot \sum_{k=0}^{N} \left(\mathbf{1}_{P_k} - \mathbf{1}_{Q_k}\right).$$

Da die Summe auf der rechten Seite eine Treppenfunktion ist, ist diese integrierbar, also auch ihr Produkt mit $\mathbf{1}_K$. Es folgt, dass f auf K integrierbar ist. Da dies für jede kompakte Menge K gilt, ist also f lokal-integrierbar.

Für $y \in [k,k+1)$ ist $f(x,y) = \mathbf{1}_{[2k,2k+1)}(x) - \mathbf{1}_{[2k+1,2k+2)}(x)$, und für $y < 0$ ist $f(x,y) = 0$, also ist $\int f(x,y)\mathrm{d}x = 0$ für alle y. Damit ist gezeigt, dass das erste Integral 0 ist. Für $x \in [2k,2k+1)$ ist $f(x,y) = \mathbf{1}_{[k,k+1)}(y)$, also $\int f(x,y)\mathrm{d}y = 1$, für $x \in [2k+1,2k+2)$ ist $f(x,y) = -\mathbf{1}_{[k,k+1)}(y)$, also $\int f(x,y)\mathrm{d}y = -1$. Für $x < 0$ ist $f(x,y) = 0$. Es folgt, dass $\left|\int f(x,y)\mathrm{d}y\right| = 1$ für alle $x \geq 0$ ist. Damit ist $x \mapsto \left|\int f(x,y)\mathrm{d}y\right|$ nicht integrierbar und das zweite Integral existiert nicht.

Wäre f integrierbar, würden nach dem Satz von Fubini beide Integrale existieren.

Aufgabe 4: $\mathbf{1}_{A_k}$ ist der punktweise Limes der monoton wachsenden Folge der Treppenfunktionen

$$\sup_{m \leq N} \mathbf{1}_{\left[\frac{\sqrt{k}}{2^m}, \frac{\sqrt{k+1}}{2^m}\right]},$$

also ist nach dem kleinen Satz von Levi:

$$\begin{aligned}\int \mathbf{1}_{A_k} &= \lim_{N\to\infty} \int \sup_{m\le N} \mathbf{1}_{\left[\frac{\sqrt{k}}{2^m}, \frac{\sqrt{k+1}}{2^m}\right]} \\ &\le \lim_{N\to\infty} \int \sum_{m=0}^{N} \mathbf{1}_{\left[\frac{\sqrt{k}}{2^m}, \frac{\sqrt{k+1}}{2^m}\right]} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{2^m} = 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\end{aligned}$$

Dies konvergiert für $k \to \infty$ gegen 0, also konvergiert die Folge $\|\mathbf{1}_{A_k}\|_1$ gegen 0, das heißt, $\mathbf{1}_{A_k}$ ist L^1-konvergent gegen 0.

Sei nun $x > 0$. Wir zeigen, dass $\mathbf{1}_{A_k}(x)$ für unendlich viele k den Wert 0 und für unendlich viele k den Wert 1 annimmt. Sei hierzu $K \in \mathbb{N}$ gegeben.

Wähle $m \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\sqrt{K} \le 2^m x$ ist. Dann gibt es ein $k \ge K$, so dass $\sqrt{k} \le 2^m x \le \sqrt{k+1}$ ist. Es folgt $x \in \left[\frac{\sqrt{k}}{2^m}, \frac{\sqrt{k+1}}{2^m}\right]$, also $\mathbf{1}_{A_k}(x) = 1$.

Nun wähle $m' \in \mathbb{N}$ so groß, dass $2^{2m'+2}x^2 - 2^{2m'}x^2 > 2$ und $2^{2m'}x^2 > K$ ist. Dann gibt es ein k', so dass $[k', k'+1] \subset (2^{2m'}x^2, 2^{2m'+2}x^2)$ ist und es folgt $k' \ge K$. Dann ist $2^{m'}x < \sqrt{k'} < \sqrt{k'+1} < 2^{m'+1}x$ und es gibt folglich kein m'', so dass $2^{m''}x \in [\sqrt{k'}, \sqrt{k'+1}]$ ist, für das also $x \in \left[\frac{\sqrt{k'}}{2^{m''}}, \frac{\sqrt{k'+1}}{2^{m''}}\right]$ wäre. Es folgt $\mathbf{1}_{A_{k'}}(x) = 0$.