Prof. Dr. H.-D. Donder
Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011
25. November 2010

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Tutorium 6

Aufgabe 1: Berechnen Sie das Volumen der folgenden Menge:

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } x^2 + z^2 \leq 1\}$$

Aufgabe 2: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ lokal-integrierbar. Zeigen Sie, dass die Menge

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \pm\infty\}$$

eine Nullmenge ist.

Aufgabe 3: Sei $P_k = [2k, 2k+1) \times [k, k+1), Q_k = [2k+1, 2k+2) \times [k, k+1) \subseteq \mathbb{R}^2$ für $k \in \mathbb{N}$ und sei

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\mathbf{1}_{P_k} - \mathbf{1}_{Q_k}\right).$$

Zeigen Sie, dass f lokal-integrierbar aber nicht integrierbar ist. Zeigen Sie, dass das Integral $\int \left(\int f(x,y)\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y$ existiert, $\int \left(\int f(x,y)\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x$ aber nicht.

Aufgabe 4: Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$A_k = \bigcup_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{k}}{2^m}, \frac{\sqrt{k+1}}{2^m}\right].$$

Zeigen Sie, dass die Folge der charakteristischen Funktionen $\mathbf{1}_{A_k}$ für kein $x > 0$ in x punktweise konvergiert, jedoch L^1-konvergent ist.