Sommersemester 2010

H. Donder, A. Fackler, P. Garcia

Analysis III Tutorium 5

Lösungskizze

Aufgabe 5.1. Sei $N\colon(\mathbb{N}\backslash\{0\})\longrightarrow\mathbb{Q}^n$ eine bijektion. Sei $\varepsilon>0$. OBdA, sei $\varepsilon<1$. Ausserdem, für jede $i\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$, sei $Q_i:=[N(i)-\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, N(i)+\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}]^n$. Wir behaupten, dass $A:=\bigcup_{i\in\mathbb{N}\backslash\{0\}} Q_i$ die gewünschte Eigenschaften besitz:

0. Man beobachtet, dass $\forall i\in(\mathbb{N}\backslash\{0\}).\upsilon(Q_i)=\dfrac{\varepsilon^n}{2^{in}}\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2^i}$.

1. Wir zeigen dass A integrierbar ist mit $\upsilon(A)\leqslant\varepsilon$.

Für $k\in(\mathbb{N}\backslash\{0\})$, seien $A_k:=\bigcup_{1\leqslant j\leqslant k} Q_j$ und $f_k:=1_{A_k}$.

(1.1). Für jede $k\in(\mathbb{N}\backslash\{0\})$, f_k ist eine Treppefunktion: Seien $P_{k1},\ldots,P_{km}$ nichtleere paarweise disjunkte Quadern mit $A_k=\bigcup_{1\leqslant j\leqslant m} P_{kj}$ und $P_{kj}\cap Q_i=\emptyset\vee P_{kj}\subset Q_i$ für $i\leqslant j\leqslant m$ und $1\leqslant i\leqslant k$. Dann $f_k=\sum_{j=1}^m 1_{P_{kj}}$. Ausserdem:

> (1.1.2) Für $i\in\{1,\ldots,k\}$, sei $B_i:=\{z_1,\ldots,z_s\in\{1,\ldots,m\}|P_{kz_1}\cup\ldots\cup P_{kz_s}=Q_i\}$. Dann
> $\int f_k dx=\sum_{j=1}^m \upsilon(P_{kj})\leqslant\sum_{i=1}^k[\sum_{j\in B_i}\upsilon(P_{kj})]=$
> $\sum_{i=1}^k\upsilon(Q_i)\leqslant\sum_{i=1}^\infty\upsilon(Q_i)\underset{\text{nach } 0}{\leqslant}\sum_{i=1}^\infty\frac{\varepsilon}{2^i}=\varepsilon$.

(1.2) Nach (1.1) und (1.1.2) folgt, dass jede f_k eine Treppefunktion ist mit $\int f_k dx\leqslant\varepsilon$. Deswegen, da $(f_k)_{k\geqslant1}$ eine monoton wachsende folge von Treppefunktionen ist, nach Satz von Levi gelten:

> (1.2.1) Die Funktion $1_A=\operatorname{Lim}_{k\longrightarrow\infty} f_k(x)$ ist integrierbar.
>
> (1.2.2) $\upsilon(A)=\int 1_A dx=\operatorname{Lim}_{k\longrightarrow\infty}\int f_k dx\leqslant\operatorname{Lim}_{k\longrightarrow\infty}\varepsilon=\varepsilon$.

Also 1. gilt.

2. Nach monotonie des Integrals, $0<\dfrac{\varepsilon^n}{2^n}=\upsilon(Q_1)\leqslant\upsilon(A)$.

3. Da $\mathbb{Q}^n\subset A$ und $\mathbb{Q}^n$ dicht in $\mathbb{R}^n$ ist, dann ist A auch dicht in $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 5.2.

Bemerkung(*): Für jede $n\in\mathbb{N}$, $C_n=\bigcup_{k=1,\ldots,m_n} Q_{nk}$, wo $K_n:=\{Q_{nk}|k\in\{1,\ldots,m_n\}\}$ die Komponenten von C_n sind. Durch eine einfache Induktion (über n), man beweiss dass jede Q_{nk} ein Interval der Länge $\upsilon(Q_{nk})=\frac{1}{3^n}$ ist und dass $|K_n|=2^n$. Also $K_n=\{Q_{nk}|1\leqslant k\leqslant 2^n\}$.

1.

z.z. C ist Abgeschlossen. (*)

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ die nach x konvergiert. Sei $i \in \mathbb{N}$. Dann $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge in C_i; da C_i Abgeschlossen ist, dann $C_i \ni x = \underset{n\longrightarrow\infty}{\mathrm{Lim}}\, x_n$. Dieses zeigt dass $\forall i \in \mathbb{N}.x \in C_i$. Also $x \in C$. Deshalb C ist Abgeschlossen.

Da C Abgschlossen ist und $C \subset [0,1]$, dann C ist Kompakt.

2.

Für jede $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \bigcup_{k=1,\ldots,m_n} Q_{nk}$, wo $K_n = \{Q_{nk} | 1 \leqslant k \leqslant 2^n\}$ die Komponenten von C_n sind. OBdA wir setzen voraus, dass die Elemente von Q_{ni} kleiner als die von $Q_{n(i+1)}$ sind (ganz formal: $\forall i, j \in \{1, 2^n\}.i < j \Longrightarrow \forall x \in Q_{ni}.x < \mathrm{minQ}_{nj}$). Nach dieser Vereinbarung, zeigen wir nun dass C überabzählbar ist:

Sei $F := \{f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \{0,\ 1\}\}$. Dann F ist überabzählbar. Fur jede $f \in F$, sei Df die recursiv definierte Folge:

$(Df)(0) := \min C_0$;

Nach induktion voraussetzung, $(Df)(n)$ wurde schon definiert und $Df(n) \in C_n$; d.h., es gibt genau ein $k \in \{1, \ldots, 2^n\}$ mit $(Df)(n) \in Q_{nk}$.

Sei $(Df)(n+1) := \begin{cases} \min Q_{(n+1)z} & \text{falls } \ f(n+1) = 0 \\ \\ \min Q_{(n+1)(z+1)} & \text{falls } \ f(n+1) = 1 \end{cases}$, wo $P(Q_{nk}) = Q_{(n+1)z} \cup Q_{(n+1)(z+1)}$.

(2.1) Df ist eine Cauchy Folge: Sei $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Dann für jede $m, l \geqslant n$

$(Df)(m), (Df)(l) \in Q_{nk}$ für irgendeine $k \in \{1, \ldots, 2^n\}$ und deswegen
$|(Df)(m) - (Df)(l)| \leqslant \upsilon(Q_{nk}) = \frac{1}{3^n} < \varepsilon$.

(2.2) Nach der Definition von D, es folgt dass Df eine Folge von Elementen in C ist.
Sei $L\colon F \longrightarrow C$ gegeben durch $L(f) := \underset{n\longrightarrow\infty}{\mathrm{Lim}}\,(Df)(i)$. Nach (2.1) die Folge Df is Cauchy und deswegen, nach $\mathbb{R}$ Vollständigkeit, es konvergiert gegen ein x. Aber Nach 1. C ist Abgeschlossen, also $x \in C$. Dieses zeigt, dass L richtig definiert ist.

(2.3) L ist injektiv: Sei $f, g \in F$, mit $f \neq g$. Sei $N' := \min\{l \in \mathbb{N} | f(l) \neq g(l)\}$; dann $N' = N + 1$. Ausserdem, OBdA, nemmen wir an, dass $f(N+1) = 0$ und $g(N+1) = 1$. Dann
$(Df)(N) = (Dg)(N) \in Q_{nk}$ für irgendeine $k \in \{1, \ldots, 2^n\}$ und für $P(Q_{nk}) = Q_{(n+1)z} \cup Q_{(n+1)(z+1)}$, es gilt $\forall s > N.(Df)(s) \in Q_{(n+1)z} \wedge (Dg)(s) \in Q_{(n+1)(z+1)}$; daraus folgt dass
$\forall s, m > N.|(Dg)(s) - (Df)(s)| = (Dg)(s) - (Df)(s) > \upsilon(Q_{nk})\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3^n} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ und deswegen

$L(g) = \underset{s>N}{\mathrm{Lim}}(Dg)(s) \geqslant \underset{s>N}{\mathrm{Lim}}[(Df)(s) + \frac{1}{3^{n+1}\cdot 2}] = L(f) + \frac{1}{3^{n+1}\cdot 2} > L(f)$. So L ist injektiv.

Da F überabzählbar und L injektiv, ist C überabzählbar.

3.

Sei $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ so dass $(\frac{2}{3})^n < \varepsilon$. Dann
$C \subset C_n = \bigcup\limits_{k=1,\ldots,m_n} Q_{nk}$ und $\upsilon(C_n) = \sum_{k=1}^{m_n} \upsilon(Q_k) \underset{\text{Bemerkung}(*)}{=} \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{3^n} = \frac{2^n}{3^n} < \varepsilon$. Deswegen, nach Satz 26 der Vorlesung, C ist eine Nullmenge.

Aufgabe 5.3.

Für diese Aufgabe wir benutzen die Gleichung aus Analysis I:

$\int \sin^k(x)dx = -\frac{1}{k}\sin^{k-1}(x)\cos(x) + \frac{k-1}{k}\int \sin^{k-2}(x)dx.$

Für $k \geqslant 1$, die Nullstellen der Funktion $x \longmapsto \sin^k(k\pi x)$ im Interval $[0,1]$ sind $\{\frac{l}{k} | l \in \{0,\ldots,k\}\}$.

Falls k ungerade:

$\|f_k\|_1 \underset{\text{Vorlesung Satz 7}}{=} \int |\sin^k(k\pi x)|dx = \int_0^1 |\sin^k(k\pi x)|dx =$

$$\sum_{l=0}^{k-1} \int_{\frac{l}{k}}^{\frac{l+1}{k}} (-1)^l \sin^k(k\pi x)dx = \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \int_{l\pi}^{(l+1)\pi} \frac{\sin^k(u)}{k\pi}du = \frac{1}{k\pi}\sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \int_{l\pi}^{(l+1)\pi} \sin^k(u)du =$$

$$\frac{1}{k\pi}\sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l[[-\frac{1}{k}\sin^{k-1}(u)\cos(u)]_{l\pi}^{(l+1)\pi} + \frac{k-1}{k}\int_{l\pi}^{(l+1)\pi} \sin^{k-2}(u)du] =$$

$$\frac{1}{k\pi}\frac{k-1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l[\int_{l\pi}^{(l+1)\pi} \sin^{k-2}(u)du] = , \text{(nach Wiederholung dieselbe Idee)}$$

$$\frac{1}{k\pi} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k-3}{k} \cdots \frac{2}{k} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l[-\cos((l+1)\pi) + \cos(l\pi)] = \frac{1}{k\pi} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k-3}{k} \cdots \frac{2}{k} \cdot 2k \leqslant \frac{4}{k\pi}$$

Fall k gerade

$\|f_k\|_1 \underset{\text{Vorlesung Satz 7}}{=} \int |\sin^k(k\pi x)|dx = \int_0^1 \sin^k(k\pi x)dx = \frac{1}{k\pi}\int_0^{k\pi} \sin^k(u)du =$

$$\frac{1}{k\pi}[[-\frac{1}{k}\sin^{k-1}(u)\cos(u)]_0^{k\pi} + \frac{k-1}{k}\int_0^{k\pi} \sin^{k-2}(u)dx] =$$

$$\frac{1}{k\pi} \cdot \frac{k-1}{k}\int_0^{k\pi} \sin^{k-2}(u)dx = , \text{(nach Wiederholung dieselbe Idee)}$$

$$\frac{1}{k\pi} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k-3}{k} \cdots \frac{1}{k}[k\pi - 0] = \frac{1}{k\pi} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k-3}{k} \cdots \frac{1}{k} \cdot k\pi \leqslant \frac{1}{k}$$

Aus der vorherige Ergebnisse folgt $\operatorname*{Lim}_{k\longrightarrow\infty} \|f_k - 0\|_1 = \operatorname*{Lim}_{k\longrightarrow\infty} \|f_k\|_1 = 0.$

Aufgabe 5.4.

Für jede $N \in \mathbb{N}$, sei $F_N := \sum_{i=0}^{N} f_k$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann für $k, m \in \mathbb{N}$, $k \geqslant m$, $\|F_k - F_m\|_1 \underset{\text{Satz der Vorlesung}}{=} \int |F_k - F_m| dx = \int |\sum_{i=0}^{k} f_i - \sum_{i=0}^{m} f_i| dx =$ $\int |\sum_{i=m+1}^{k} f_i| dx \leqslant \int \sum_{i=m+1}^{k} |f_i| dx = \sum_{i=m+1}^{k} \int |f_i| dx < \varepsilon$ für m gross genug. Dieses zeigt, dass $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge in L^1 ist. So, nach Riez-Fisher Satz, F_k konvergiert in L^1 gegen eine integrierbare Funktion $\underset{k\longrightarrow\infty}{\mathrm{Lim}} F_k = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$. Ausserdem, (nochmal nach Riez-Fisher) $\int (\sum_{k=0}^{\infty} f_k) dx = \int \underset{k\longrightarrow\infty}{\mathrm{Lim}} F_k = \underset{k\longrightarrow\infty}{\mathrm{Lim}} \int F_k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int f_k dx$.