LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Sommersemester 2010

H. Donder, A. Fackler, P. Garcia

Analysis III Tutorium

Blatt 5

Aufgabe 5.1. Seien $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie, dass eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $0 < v(A) \leqslant \varepsilon$ und A dicht in $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 5.2. Sei C Cantors Menge. Explizit: Sei $C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$, wo

$C_0 := [0,1]$;

$C_{n+1} := \bigcup_{k=1,\dots,m_n} P(Q_k)$;

$C_n = \bigcup_{k=1,\dots,m_n} Q_{nk}$;

$\{Q_{nk} | k \in \{1, \dots, m_n\}\}$ die Menge aller Komponenten von C_n ist (eine Komponente einer Menge $M \subset \mathbb{R}$ ist eine Teilmenge von M die maximal zusammenhängend ist);

für ein interval $I = [a,b] \in \mathbb{R}$, $P(I) := [a, a + \frac{1}{3}(b-a)] \cup [\frac{2}{3}(b-a), b]$.

Zeigen Sie, dass

1. C ist Kompakt.
2. C ist überabzählbar.
3. C ist eine Nullmenge.

Aufgabe 5.3. Für jede $k \in \mathbb{N}$, sei $f_k \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $f_k(x) := \begin{cases} \sin^k(k\pi x) & \text{falls } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.
Zeigen Sie, dass $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist L^1 konvergent gegen die Funktion 0.

Aufgabe 5.4. Es sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von integrierbare Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} \int |f_k| dx < \infty$. Zeigen Sie, dass die Reihe $(\sum_{k=0}^{N} f_k)_{N \in \mathbb{N}}$ in L^1 gegen eine integrierbare Funktion $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ konvergiert. Ausserdem, es gilt $\int \sum_{k=0}^{\infty} f_k \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int f_k dx$.