Prof. Dr. H.-D. Donder
Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011
11. November 2010

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Lösungsskizze zu Tutorium 4

Aufgabe 1:

$$
\begin{aligned}
v(A) &= \int_0^1 v(A_y)\mathrm{d}y = \int_0^1 v([0,y])\mathrm{d}y = \int_0^1 y\mathrm{d}y = \frac{1}{2} \\
v(B) &= \int_0^1 v(B_z)\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^z v([0,y])\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^z y\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \frac{z^2}{2}\mathrm{d}z = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Wir zeigen schließlich noch, dass $v(C) = 0$ ist. Sei hierzu C_n für $n \in \mathbb{N}$ die Menge aller x, deren nicht abbrechende Dezimaldarstellung an den ersten n Nachkommastellen keine 0 hat. Dann ist offenbar $C \subseteq C_n$, also $v(C) \leq v(C_n)$, und es genügt zu zeigen, dass $\inf_n v(C_n) = 0$ ist. Die Zahlen, deren erste n Nachkommastellen übereinstimmen, bilden jeweils ein Intervall der Länge 10^{-n}. Bei 9^n dieser Intervalle kommt in den ersten n Ziffern keine 0 vor. Es ist also $v(C_n) = 9^n \cdot 10^{-n} = 0{,}9^n$. Dies konvergiert gegen 0.

(Beachte, dass die Zahlen, deren Dezimaldarstellung nicht eindeutig ist, irrelevant sind, da sie alle rational sind und $v(\mathbb{Q}) = 0$ ist.)

Aufgabe 2:

$$
\begin{aligned}
\int_K \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}(x,y) &= \int_{-1}^1 \int_{[-\sqrt{1-y^2},\sqrt{1-y^2}]} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 2\mathrm{d}y = 4 \\
\int_K \sqrt{1-y^2}\mathrm{d}(x,y) &= \int_{-1}^1 \int_{[-\sqrt{1-y^2},\sqrt{1-y^2}]} \sqrt{1-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 2(1-y^2)\mathrm{d}y \\
&= 2\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3: Sei φ eine Hüllreihe von $2 \cdot \mathbf{1}_A$ mit $I(\varphi) < 2v(A) + \varepsilon$. Dann ist

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) > 1\}$$

(nach Blatt 1, Aufgabe 4) eine offene Obermenge von A und es gilt $\varphi \geq \mathbf{1}_U + \mathbf{1}_A$, also $2v(A) + \varepsilon > I(\varphi) \geq v(U) + v(A)$. Daraus folgt $v(U) < v(A) + \varepsilon$.

Aufgabe 4: Sind die Q_k Quader, so dass $\sum_{k=0}^{\infty} v(Q_k)$ konvergiert, dann konvergiert die monoton wachsende Folge der Treppenfunktionen $\sum_{k=0}^{N} \mathbf{1}_{Q_k}$ von unten gegen $f = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{Q_k}$, also ist nach dem kleinen Satz von Levi f integrierbar mit Integral $\sum_{k=0}^{\infty} v(Q_k)$. Ist nun $A \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k$, so ist $\mathbf{1}_A \leq f$, also ist $v(A) \leq \sum_{k=0}^{\infty} v(Q_k)$ und damit $v(A)$ höchstens gleich dem angegebenen Infimum.

Sei umgekehrt $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle ein U wie in Aufgabe 3. Dann gibt es Quader $Q_0, Q_1, \ldots \subset \mathbb{R}^n$, die höchstens Randpunkte gemeinsam haben und deren Vereinigung U ist. Für alle $k \neq l$ ist also $Q_k \cap Q_l$ eine Nullmenge. Daher ist

$$\sum_{k=0}^{N} v(Q_k) = \int \sum_{k=0}^{N} \mathbf{1}_{Q_k} \mathrm{d}x \leq \int \mathbf{1}_U \mathrm{d}x + \int \sum_{k<l\leq N} \infty \cdot \mathbf{1}_{Q_k \cap Q_l} \mathrm{d}x = v(U)$$

und somit auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} v(Q_k) \leq v(U) < v(A) + \varepsilon$$

Also ist $v(A)$ auch mindestens das Infimum.