Wintersemester 2010/2011

H. Donder, A. Fackler, P. Garcia

Analysis III Tutorium

Lösungskizze Blatt 3

Aufgabe 3.1.

Nehmmen wir an, dass $f(a) > 0$ für irgendeine $a \in A$. Da A offen und f stetig, dann existiert eine $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ so dass $B_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| < \varepsilon\} \subset A$ und $f(x) > 0$ für alle $x \in B_\varepsilon(a)$.

Sei $Q \neq \emptyset$ eine offene quader so dass $a \in \overline{Q} \subset B_\varepsilon(a)$, wo $\overline{Q}$ der Abschluss von Q ist. Da $\overline{Q}$ Kompakt, dann $\mu := \min\{f(x) | x \in \overline{Q}\} > 0$ existiert. Dann $f \geqslant \mu 1_{\overline{Q}}$ und deswegen $\int f dx \geqslant \int \mu 1_{\overline{Q}} dx = \mu \cdot v(\overline{Q}) > 0$.

Aufgabe 3.2.

Wir zeigen erst dass $\|f\|_1 = 0$. (!)

Sei $l\colon \mathbb{N}\backslash\{0\} \longrightarrow [0,1] \cap \mathbb{Q}$ eine Aufzählung der rational Zahlen im interval $[0,1]$.

Sei $\varepsilon > 0$. Fur $i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, sei $A(i) := \{x \in \mathbb{R} \mid \|x - l(i)\| < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\}$.

Sei $\varphi_\varepsilon(x) := \sum_{i=0}^{\infty} 1_{A(i)}$. Dann φ_ε ist eine Hüllreihe von f und $I(\varphi_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} v(A(i)) = \sum_{i=1}^{\infty} |l(i) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} - (l(i) - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}})| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \varepsilon$.

Da das vorheriges für beliebiges ε gemacht wuerde, dann $\|f\|_1 = \inf\{I(\varphi) | \varphi \text{ ist Hüllreihe von } f\} = 0$.

Auf der andere Seite, für $k \in \mathbb{N}$, sei $f_k\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f_k(x) := 0$. Dann $\forall k \in \mathbb{N}$ f_k ist eine Treppefunktion und $\|f - f_k\|_1 = \|f\|_1 \underset{\text{nach (!)}}{=} 0$. Deswegen $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} \|f - f_k\|_1 = 0$.

Also, f ist integrierbar.

Der Beweiss dass g integrierbar ist, ist genaus so wie der Beweiss dass f integrierbar ist.

Aufgabe 3.3. Es sei $X := [a,b]$ und $Y := [c,d]$. Dann

1.

$$\int_Q f(x)g(y)d(x,y) \underset{\text{Vorlesungs Lemma 17}}{=} \int_Y [\int_X f(x)g(y)dx]dy \underset{\text{linearität}}{=} \int_Y g(y)[\int_X f(x)dx]dy =$$

$$\underset{\text{linearität}}{=} [\int_X f(x)dx][\int_Y g(y)dy] \underset{\text{nach * und Vorlesungs Satz 10}}{=} [\int_a^b f(x)dx][\int_c^d g(y)dy] =$$

$$[\int_a^b f(x)dx][\int_c^d g(x)dx].$$

* Da f und g stetige Funktionen in kompakte Intervalle sind, dann sind f und g Regelfunktionen (Analysis I).

2. $\int_Q (f(x)+g(y))d(x,y) \underset{\text{linearität}}{=} \int_Q f(x)d(x,y)+\int_Q g(y)d(x,y) \underset{\text{nach 1.}}{=}$
$= [\int_a^b f(x)dx][\int_c^d 1dx]+[\int_a^b 1dx][\int_c^d g(x)dx] = (d-c)\int_a^b f(x)dx+(b-a)\int_c^d g(x)dx$

Aufgabe 3.4. Man soll die Formeln von Aufgabe 3.3 benutzen. Die Ergebnisse sind:
$\int_S \cos x \cdot \sin y \, d(x,y) = 1.$
$\int_R (x^2+y^2)d(x,y) = \frac{4}{3}$