Prof. Dr. H.-D. Donder
Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011
25. Oktober 2010

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Lösungsskizze zu Tutorium 2

Aufgabe 1: Sei $f = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathbf{1}_{Q_i}$ eine Darstellung von f mit disjunkten Quadern Q_i (möglich nach Lemma 1). Dann ist an jeder Stelle höchstens einer der Summanden von 0 verschieden und wegen $\sin(0) = 0$ gilt:

$$\sin \circ f = \sum_{i=1}^{k} \sin(a_i) \mathbf{1}_{Q_i}$$

Jedoch ist $\cos \circ f$ keine Treppenfunktion: Für alle $x \notin \bigcup_{i=1}^{k} Q_i$ gilt nämlich $\cos(f(x)) = 1$; die Menge der x, für die $\cos(f(x)) = 1$ ist, ist also unbeschränkt. Ist jedoch $g = \sum_{i=1}^{m} b_i \mathbf{1}_{P_i}$ eine Treppenfunktion, so verschwindet $g(x)$ für alle $x \notin \bigcup_{i=1}^{m} P_i$, das heißt, die Menge der x, für die $g(x) \neq 0$ ist, ist beschränkt. Also kann g nicht $\cos \circ f$ sein.

Aufgabe 2: $\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \mathbf{1}_{(a_i, b_i)}$ ist eine Hüllkurve von f genau dann, wenn $\psi = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \mathbf{1}_{(\alpha a_i, \alpha b_i)}$ Hüllkurve von g ist, denn:

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \mathbf{1}_{(\alpha a_i, \alpha b_i)}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \mathbf{1}_{(a_i, b_i)} \left(\frac{x}{\alpha}\right) = \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

Es ist aber:

$$I(\psi) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(\alpha b_i - \alpha a_i) = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} c_i(b_i - a_i) = \alpha I(\varphi)$$

Nun ist $\|f\|_1$ nach Definition das Infimum aller $I(\varphi)$ mit Hüllkurven φ von f. Nach dieser Rechnung ist $\|g\|_1$ das Infimum aller $\alpha I(\varphi)$ für Hüllkurven φ von f. Also ist $\|g\|_1 = \alpha \|f\|_1$.

Aufgabe 3: Sei $h_n = n \cdot \mathbf{1}_{\{(0,0)\}}$ für $n \in \mathbb{N}$. Jedes h_n ist eine Treppenfunktion, da $\{(0,0)\} = [0,0] \times [0,0]$ ein Quader (mit Volumen 0) ist. Die h_n bilden also eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen mit Integral 0. Nach dem kleinen Satz von Levi ist also der punktweise Limes der Folge h_n ebenfalls integrierbar mit Integral 0. Dieser Limes ist aber f.

Das gleiche Argument, nur mit den Treppenfunktionen $h_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{\{1/(n+1)\}}$, zeigt $\int g \mathrm{d}x = 0$.

Aufgabe 4: Angenommen, f wäre integrierbar. Dann wäre auch $|f|$ integrierbar. Nach Definition ist für jedes $N \in \mathbb{N}$ die Treppenfunktion

$$h_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1} \mathbf{1}_{[n,n+1)}$$

kleiner oder gleich $|f|$, also ist wegen der Monotonie des Integrals

$$\int |f| \mathrm{d}x \geq \int h_N \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1}.$$

Dies divergiert aber gegen ∞ (harmonische Reihe), also muss $\|f\|_1 = \int |f| \mathrm{d}x = \infty$ sein. Andererseits ist

$$\int_0^a f \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^N}{N+1}(a-N) \qquad \text{für} \qquad a \in [N, N+1),$$

was für $a \to \infty$ gegen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ konvergiert.