Wintersemester 2010/2011

H. Donder, A. Fackler, P. Garcia

Analysis III Tutorium

Lösungskizze Blatt 1

Aufgabe 1.1.

a.

$''\subset''$.

Sei $(a_1,b_1)\in(A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_2)$.

Dann $a_1\in A_1\wedge b_1\in B_1$ oder $a_1\in A_2\wedge b_1\in B_2$.

Fall $a_1\in A_1$ und $b_1\in B_1$.

Wenn $a_1\in A_2$, dann $(a_1,b_1)\in(A_1\cap A_2)\times(B_1\cup B_2)$.

Wenn $a_1\notin A_2$, dann $(a_1,b_1)\in[(A_1\backslash A_2)\times B_1]$.

Fall $a_1\in A_2$ und $b_1\in B_2$.

Wenn $a_1\in A_1$, dann $(a_1,b_1)\in(A_1\cap A_2)\times(B_1\cup B_2)$.

Wenn $a_1\notin A_1$, dann $(a_1,b_1)\in[(A_2\backslash A_1)\times B_2]$.

Also $(A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_2)\subset[(A_1\backslash A_2)\times B_1]\cup[(A_1\cap A_2)\times(B_1\cup B_2)]\cup[(A_2\backslash A_1)\times B_2]$.

$''\supset''$.

Sei $(a_1,b_1)\in[(A_1\backslash A_2)\times B_1]\cup[(A_1\cap A_2)\times(B_1\cup B_2)]\cup[(A_2\backslash A_1)\times B_2]$.

Dann $a_1\in(A_1\backslash A_2)\wedge b_1\in B_1$ oder $a_1\in(A_1\cap A_2)\wedge b_1\in(B_1\cup B_2)$ oder $a_1\in(A_2\backslash A_1)\wedge b_1\in B_2$.

Fall $a_1\in(A_1\backslash A_2)\wedge b_1\in B_1$. Dann $(a_1,b_1)\in(A_1\times B_1)\subset(A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_2)$.

Fall $a_1\in(A_1\cap A_2)\wedge b_1\in(B_1\cup B_2)$. Dann $a_1\in A_1\wedge a_1\in A_2)$ and $b_1\in A_1\vee b_1\in B_2$. Wenn $b_1\in B_1$, dann $(a_1,b_1)\in(A_1\times B_1)\subset(A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_2)$. Wenn $b_1\in B_2$, dann $(a_1,b_1)\in(A_2\times B_2)\subset(A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_2)$.

Fall $a_1\in(A_2\backslash A_1)\wedge b_1\in B_2$. Dann $(a_1,b_1)\in(A_2\times B_2)\subset(A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_2)$.

Also $(A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_2)\supset[(A_1\backslash A_2)\times B_1]\cup[(A_1\cap A_2)\times(B_1\cup B_2)]\cup[(A_2\backslash A_1)\times B_2]$

b.

$(a_1,b_1)\in[(A_1\backslash A_2)\times B_1]\Longrightarrow a_1\notin A_2\Longrightarrow (a_1,b_1)\notin[(A_1\cap A_2)\times(B_1\cup B_2)]$.

$(a_1,b_1)\in[(A_1\backslash A_2)\times B_1]\Longrightarrow a_1\notin A_2\Longrightarrow (a_1,b_1)\notin[(A_2\backslash A_1)\times B_2]$.

$(a_1,b_1)\in[(A_1\cap A_2)\times(B_1\cup B_2)]\Longrightarrow a_1\in A_2\Longrightarrow (a_1,b_1)\notin[(A_1\backslash A_2)\times B_1]$.

$(a_1,b_1)\in[(A_1\cap A_2)\times(B_1\cup B_2)]\Longrightarrow a_1\in A_1\Longrightarrow (a_1,b_1)\notin[(A_2\backslash A_1)\times B_2]$.

$(a_1,b_1)\in[(A_2\backslash A_1)\times B_2]\Longrightarrow a_1\notin A_1\Longrightarrow (a_1,b_1)\notin[(A_1\backslash A_2)\times B_1]$.

$(a_1,b_1)\in[(A_2\backslash A_1)\times B_2]\Longrightarrow a_1\notin A_1\Longrightarrow (a_1,b_1)\notin[(A_1\cap A_2)\times(B_1\cup B_2)]$.

Also, $[(A_1\backslash A_2)\times B_1],[(A_1\cap A_2)\times(B_1\cup B_2)],[(A_2\backslash A_1)\times B_2]$ sind paarweise disjunkte.

Aufgabe 1.2.

a.

$''\subset''$.

Sei $(a,b)\in(A_1\times B_1)\backslash(A_2\times B_2)$.

Dann $a\in A_1\wedge b\in B_1$ und $(a,b)\notin(A_2\times B_2)$; d.h., $a\in A_1\wedge b\in B_1$ und $a\notin A_2\vee b\notin B_2$.

Falls $a\notin A_2$, dann $(a,b)\in[(A_1\backslash A_2)\times B_1)]$.

Falls $a\in A_2$, dann $b\notin B_2$ und so $(a,b)\in[(A_1\cap A_2)\times(B_1\backslash B_2)]$.

Also $(A_1\times B_1)\backslash(A_2\times B_2)\subset[(A_1\cap A_2)\times(B_1\backslash B_2)]\cup[(A_1\backslash A_2)\times B_1)]$

$''\supset''$.

Sei $(a,b)\in[(A_1\cap A_2)\times(B_1\backslash B_2)]\cup[(A_1\backslash A_2)\times B_1)]$.

Dann $(a,b)\in[(A_1\cap A_2)\times(B_1\backslash B_2)]\vee(a,b)\in[(A_1\backslash A_2)\times B_1)]$.

Falls $(a,b)\in[(A_1\cap A_2)\times(B_1\backslash B_2)]$, dann $a\in A_1$, $b\in B_1$ und $b\notin B_2$; so $(a,b)\notin(A_2\times B_2)$ und deswegen $(a,b)\in(A_1\times B_1)\backslash(A_2\times B_2)$.

Falls $(a,b)\in[(A_1\backslash A_2)\times B_1)]$, dann $a\in A_1$, $a\notin A_2$ und $b\in B_1$; so $(a,b)\notin(A_2\times B_2)$ und deswegen $(a,b)\in(A_1\times B_1)\backslash(A_2\times B_2)$.

Also $(A_1\times B_1)\backslash(A_2\times B_2)\supset[(A_1\cap A_2)\times(B_1\backslash B_2)]\cup[(A_1\backslash A_2)\times B_1)]$

b.

$(a,b)\in(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)\Longleftrightarrow$

$a\in A_1\wedge b\in B_1$ and $a\in A_2\wedge b\in B_2\Longleftrightarrow$

$(a,b)\in(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)$.

Aufgabe 1.3.

a). Sei g die Charakteristische Funktion von $\{0\} \subset \mathbb{R}^n$ (d.h., $g := 1_{\{0\}}$).

Dann $\|g\|_1 = v(\{0\}) = 0$ und $g \neq 0$.

b).

Sei $f, g \in C[0,1]$. Dann

- $N_0(f) = |f(0)| \geqslant 0$.
- Für $c \in \mathbb{R}$, $N_0(cf) = |(cf)(0)| = |cf(0)| = |c||f(0)| = |c|N_0(f)$.
- $N_0(f+g) = |(f+g)(0)| = |f(0) + g(0)| \leqslant |f(0)| + |g(0)| = N_0(f) + N_0(g)$

Aufgabe 1.4.

a.

Sei $f, g \in C[0,1]$. Dann

- Da $0 \leqslant |f|$, dann $0 \leqslant \int_0^1 |f| dx = N_1(f)$.
- Für $c \in \mathbb{R}$, $N_1(cf) = \int_0^1 |cf| dx = \int_0^1 |c||f| dx = |c| \int_0^1 |f| dx = |c| N_1(f)$.
- Da $|f+g| \leqslant |f| + |g|$, dann $N_1(f+g) = \int_0^1 |f+g| dx \leqslant \int_0^1 (|f| + |g|) dx =$

  $= \int_0^1 |f| dx + \int_0^1 |g| dx = N_1(f) + N_1(g)$.

b.

Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, die Funktion f_n ist einfach die Vereinigung der Strecken $S_1(n)$, $S_2(n)$ und $S_3(n)$, wo $S_1(n) := [(0,0), ((1-\frac{1}{n})\frac{1}{2}, 0)]$, $S_2(n) := [((1-\frac{1}{n})\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, 1)]$ und $S_3(n) := [(\frac{1}{2}, 1), (1,1)]$.

Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1 \leqslant m$; OBdA, sei $n \leqslant m$. Dann $N_1(f_n - f_m) = \int_0^1 |f_n - f_m| dx$ ist die Fläche zwischen den Strecken $S_2(n)$, $S_2(m)$ und $[((1-\frac{1}{n})\frac{1}{2}, 0), ((1-\frac{1}{m})\frac{1}{2}, 0)]$. Da diese Fläche kleiner ist als die Fläche under der Strecke $S_2(n)$, und da solche Fläche $\underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$, dann $\forall \varepsilon \exists k \in \mathbb{N}. \forall n, m \geqslant k. N_1(f_n - f_m) < \varepsilon$. Also $(f_n)_{n \geqslant 1}$ ist Cauchy.

c.

Es ist klar dass $F \notin C[0,1]$. Auf der andere Seite, für $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, $N_1(f_n - F)$ ist die Fläche unter der Strecke $S_2(n)$. Aber wie wir schon gesagt haben, solche Fläche geht nach Null wenn n nach Undenlich geht. Das bedeutet, $(f_n)_{n \geqslant 1}$ konvergiert nach $F \notin C[0,1]$ bezüglich N_1.