LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. H.-D. Donder
Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011
3. Februar 2011

# Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

## Lösungsskizze zu Tutorium 14

**Aufgabe 1:** Mit $f$ und $g$ ist auch $f \otimes g$ integrierbar. Mit dem Diffeomorphismus $\varphi(x, y) = (y, x-y)$ folgt aus dem Tansformationssatz, dass auch die Funktion $f(y)g(x-y)$ integrierbar ist. Nach dem Satz von Fubini ist dann die Funktion $y \mapsto f(y)g(x-y)$ für fast alle $x$ integrierbar.

**Aufgabe 2:** Die Substitution $y = x - u$ liefert

$$f * g(x) = \int f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y = \int g(u)f(y-u)\,\mathrm{d}u = g * f(x),$$

falls eins der Integrale definiert ist.

Die zweite Rechenregel folgt ganz direkt:

$$\begin{aligned} f * (g+h)(x) &= \int f(y)(g(x-y) + h(x-y))\,\mathrm{d}y \\ &= \int f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y + \int f(y)h(x-y)\,\mathrm{d}y = f * g(x) + f * h(x) \end{aligned}$$

Die dritte Regel erhält man wieder mit einer Substitution, $z = w - y$, denn:

$$\begin{aligned} f * (g * h)(x) &= \int f(y) g * h(x-y)\,\mathrm{d}y = \int f(y) \int g(z)h(x-y-z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \\ (f * g) * h(x) &= \int f * g(w)h(x-w)\,\mathrm{d}w = \int \int f(y)g(w-y)h(x-w)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}w \end{aligned}$$

**Aufgabe 3:** **(a)** $\int_\gamma \,\mathrm{d}y = \int_a^b F'(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$
**(b)** $\int_\gamma F'(F(x))\,\mathrm{d}y = \int_a^b F'(F(t))F'(t)\,\mathrm{d}t = F(F(b)) - F(F(a))$

**Aufgabe 4:** **(a)** Die Gleichheit auf der rechten Seite folgt aus:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Nun berechnen wir $J$ mit dem Satz von Fubini, indem wir den Integranden als Potenzreihe darstellen und ausnutzen, dass bei gleichmäßiger Konvergenz Limes und Integral vertauscht werden können:

$$J \quad = \quad \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} y^{2k} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_0^1 x^{2k} \,\mathrm{d}x \right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

**(b)** Zunächst ist $x = \frac{\sin u}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)} \in (0,1)$, da $\frac{\pi}{2} - v < u$ und $u, v \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ist. Ebenso zeigt man $y \in (0,1)$.

Ist nun $(x,y) \in (0,1)^2$ gegeben, so erhalten wir durch Quadrieren: $x^2(\cos v)^2 = (\sin u)^2 = 1 - (\cos u)^2$ und ebenso $y^2(\cos u)^2 = 1 - (\cos v)^2$. Daraus erhalten wir eindeutige $u, v \in T$:

$$u = \arccos \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 - x^2 y^2}} \quad \text{und} \quad v = \arccos \sqrt{\frac{1 - y^2}{1 - x^2 y^2}}$$

Diese Werte sind beide in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, da die Brüche unter den Wurzeln positiv sind, und es gilt:

$$\begin{aligned} \cos(u+v) &= \cos u \cos v - \sin u \sin v = \cos u \cos v - \sqrt{(1 - (\cos u)^2)(1 - (\cos v)^2)} \\ &= \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}{1 - x^2 y^2} - \frac{\sqrt{(x^2 - x^2 y^2)(y^2 - x^2 y^2)}}{1 - x^2 y^2} = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} > 0, \end{aligned}$$

also $u + v < \frac{\pi}{2}$.

Wir haben also eine stetig differenzierbare Umkehrabbildung gefunden, und offenbar ist

$$\varphi : T \to (0,1)^2, \varphi(u,v) = \left( \frac{\sin u}{\cos v}, \frac{\sin v}{\cos u} \right)$$

auch selbst stetig differenzierbar, also ein Diffeomorphismus.

**(c)** Die Jacobi-Determinante hiervon ist

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\cos u}{\cos v} & \frac{\sin u \sin v}{(\cos u)^2} \\ \frac{\sin u \sin v}{(\cos u)^2} & \frac{\cos v}{\cos u} \end{pmatrix} = 1 - \frac{(\sin u)^2 (\sin v)^2}{(\cos v)^2 (\cos u)^2}$$

Damit ergibt sich mit dem Transformationssatz:

$$J = \int_T 1 \,\mathrm{d}(u,v) = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{8}$$

Nach Teilaufgabe (a) ist daher:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$