Prof. Dr. H.-D. Donder
Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011
3. Februar 2011

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Tutorium 14

Aufgabe 1: Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar. Falls das Integral definiert ist, sei für $x \in \mathbb{R}^n$

$$f * g(x) = \int f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y,$$

ansonsten setze $f * g(x) = 0$.

Zeigen Sie, dass das Integral für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ definiert ist.

Aufgabe 2: Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln:

$$f * g = g * f, \quad f * (g + h) = f * g + f * h, \quad f * (g * h) = (f * g) * h$$

Aufgabe 3: Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $f > 0$, $a < b$ und $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (t, F(t))$. Bestimmen Sie:

(a) $$\int_\gamma \mathrm{d}y$$

(b) $$\int_\gamma F'(F(x))\,\mathrm{d}y$$

Aufgabe 4: (aus dem "Buch der Beweise" von Martin Aigner und Günter M. Ziegler)
Sei $J = \displaystyle\int_{(0,1)^2} \frac{1}{1 - x^2y^2}\,\mathrm{d}(x, y)$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der geometrischen Reihe:

$$J = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{4}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$$

(b) Weisen Sie nach, dass duch

$$x = \frac{\sin u}{\cos v} \quad \text{und} \quad y = \frac{\sin v}{\cos u}$$

ein Diffeomorphismus zwischen dem Quadrat $(0, 1)^2$ und dem Dreieck $T = \{(u, v) \mid u, v > 0, u + v < \frac{\pi}{2}\}$ gegeben ist.

(c) Benutzen Sie den Transformationssatz mit diesem Diffeomorphismus, um das Integral J zu berechnen und den Wert der Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ herauszufinden.