Wintersemester 2010

H. Donder, A. Fackler, P. Garcia

Analysis III Tutorium

Lösungen

Aufgabe 13.1.

(*a*)

$$\int_{\partial G} f dx + g dy = \int_{\partial\gamma} f dx + g dy \underset{\text{Satz von Stokes}}{=} \int_{\gamma} d(f dx + g dy). \qquad (1a)$$

Aber $d(fdx + gdy) = (D_1 f dx + D_2 f dy) \wedge dx + (D_1 g dx + D_2 g dy) \wedge dy =$

$$= D_1 f dx \wedge dx + D_2 f dy \wedge dx + D_1 g dx \wedge dy + D_2 g dy \wedge dy =$$

$$= D_2 f dy \wedge dx + D_1 g dx \wedge dy =$$

$$= (-1)^{1\cdot 1} D_2 f dx \wedge dy + D_1 g dx \wedge dy = (D_1 g - D_2 f) dx \wedge dy$$

Also

$$\int_{\gamma} d(fdx + gdy) = \int_{\gamma} (D_1 g - D_2 f) dx \wedge dy = \int_{Q} \gamma^*((D_1 g - D_2 f) dx \wedge dy) \underset{\text{Satz 6 der Vorlesung}}{=}$$

$$= \int_{Q} \det(D\gamma) \cdot ((D_1 g - D_2 f) \circ \gamma) dx \wedge dy =$$

$$= \int_{Q} \det(D\gamma) \cdot ((D_1 g - D_2 f) \circ \gamma) d(x, y) =$$

$$\underset{\text{gleiche Argument wie in kommende Aufgabe 14.4 (*)}}{=}$$

$$= \pm \int_{Q} ((D_1 g - D_2 f) \circ \gamma) |\det(D\gamma)| d(x, y) \underset{\text{Transformationsatz}}{=}$$

$$= \pm \int_{\gamma[Q]} (D_1 g - D_2 f) d(x, y) = \pm \int_{G} (D_1 g - D_2 f) d(x, y). \qquad (2a)$$

Nach (1a) und (2a) folgt die Behauptung.

(*b*)

G ist integrierbar denn $\gamma[Q] = G$ ist kompakt (da γ stetig und Q kompakt).

$$\frac{1}{2}\left|\int_{\partial G} -y dx + x dy\right| \underset{\text{nach }(a)}{=} \frac{1}{2}\left|\int_{G} [(\tfrac{\partial}{\partial x} x)(x, y) - (\tfrac{\partial}{\partial y}(-y))(x, y)] d(x, y)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\int_{G} (1 + 1) d(x, y)\right| = \int_{G} 1 d(x, y) = v(G).$$

Aufgabe 13.2.

Sei $\varepsilon \in (0,1)$

Sei $\gamma\colon [0,2] \times [0+\varepsilon, 2\pi-\varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(r,\theta) := (r\cos^3\theta, r\sin^3\theta)$. Es ist nicht schwierig zu zeigen dass γ ein Dipheomorphismus auf eine offene Menge $U \supset [0,2]\times[0+\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$ ist.

Sei $G_\varepsilon := \gamma[[0,2]\times[0+\varepsilon,2\pi-\varepsilon]]$.

Dann $\partial\gamma = (-1)^{1-1}(\gamma_1^1-\gamma_1^0)+(-1)^{2-1}(\gamma_2^1-\gamma_2^0) = \gamma_1^1-\gamma_1^0-\gamma_2^1+\gamma_2^0$, wo

$\gamma_1^0\colon [0+\varepsilon,2\pi-\varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_1^0(\theta) := \gamma(0,\theta) = (0,0)$,

$\gamma_1^1\colon [0+\varepsilon,2\pi-\varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_1^1(\theta) := \gamma(2,\theta) = (2\cos^3\theta, 2\sin^3\theta)$,

$\gamma_2^0\colon [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_2^0(r) := \gamma(r,\varepsilon) = (r\cos^3\varepsilon, r\sin^3\varepsilon)$,

$\gamma_2^1\colon [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_1^1(r) := \gamma(r,2\pi-\varepsilon) = (r\cos^3(2\pi-\varepsilon), r\sin^3(2\pi-\varepsilon))$.

So, nach Aufgabe 13.1,

$$v(G_\varepsilon) = \frac{1}{2}\left|\int_{\partial G_\varepsilon} xdy - ydx\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\int_{\gamma_1^1} xdy-ydx + \int_{-\gamma_1^0} xdy-ydx + \int_{-\gamma_2^1} xdy-ydx + \int_{\gamma_2^0} xdy-ydx\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\int_{\gamma_1^1} xdy-ydx - \int_{\gamma_1^0} xdy-ydx - \int_{\gamma_2^1} xdy-ydx + \int_{\gamma_2^0} xdy-ydx\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\int_{\gamma_1^1} xdy-ydx + \int_{\gamma_1^0} ydx-xdy + \int_{\gamma_2^1} ydx-xdy + \int_{\gamma_2^0} xdy-ydx\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\Big|\int_0^{2\pi} (2\cos^3\theta)(6\sin^2\theta)(\cos\theta) - (2\sin^3\theta)(6\cos^2\theta)(-\sin\theta)d\theta +$$

$$\int_0^{2\pi} 0\,d\theta +$$

$$\int_0^2 \left((r\sin^3(2\pi-\varepsilon)\cdot\cos^3(2\pi-\varepsilon) - r\cos^3(2\pi-\varepsilon)\cdot\sin^3(2\pi-\varepsilon)\right)dr +$$

$$\int_0^2 (r\cos^3\varepsilon\cdot\sin^3\varepsilon - r\sin^3\varepsilon\cdot\cos^3\varepsilon)dr\Big|$$

Sei $R_\varepsilon = \int_0^2 \left((r\sin^3(2\pi-\varepsilon)\cdot\cos^3(2\pi-\varepsilon) - r\cos^3(2\pi-\varepsilon)\cdot\sin^3(2\pi-\varepsilon)\right)dr +$

$\int_0^2 (r\cos^3\varepsilon\cdot\sin^3\varepsilon - r\sin^3\varepsilon\cdot\cos^3\varepsilon)dr$.

Bemerkung(*): Nach Stetigkeit der Funktionen $t \longmapsto \sin^3(t)$ und $t \longmapsto \cos^3(t)$ folgt dass $\operatorname*{Lim}_{\varepsilon\longrightarrow 0} R_\varepsilon = 0$.

Letzendlich,

$$v(G) = \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} v(G_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\frac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi} (2\cos^3\theta)(6\sin^2\theta)(\cos\theta) - (2\sin^3\theta)(6\cos^2\theta)(-\sin\theta)d\theta + R_\varepsilon\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi} (2\cos^3\theta)(6\sin^2\theta)(\cos\theta) - (2\sin^3\theta)(6\cos^2\theta)(-\sin\theta)d\theta + \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} R_\varepsilon\right|$$

$$\underset{\text{da } \lim_{e\longrightarrow 0} R_\varepsilon = 0}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi} (2\cos^3\theta)(6\sin^2\theta)(\cos\theta) - (2\sin^3\theta)(6\cos^2\theta)(-\sin\theta)d\theta\right| =$$

$$= 6\int_0^{2\pi} (\cos^4\theta)(\sin^2\theta) + (\sin^4\theta)(\cos^2\theta)d\theta \underset{\text{da } \cos^4\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta\cos^2\theta=\sin^2\theta\cos^2\theta}{=}$$

$$= 6\int_0^{2\pi} (\sin^2\theta)(\cos^2\theta)d\theta = 6\int_0^{2\pi} \frac{(\sin^2 2\theta)}{4}d\theta = \frac{6}{4}\int_0^{2\pi} (\sin^2 2\theta)d\theta = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1-(\cos 4\theta)}{2}d\theta =$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} d\theta - \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \cos 4\theta\, d\theta = \frac{3}{4}[\theta]_0^{2\pi} - \frac{3}{4}\left[\frac{\sin 4\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{6}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi.$$

Aufgabe 13.3. Da für eine 2-Fläche (γ, Q), $\partial\gamma$ ist eine geschlossene Kurve, dann reicht es zu zeigen dass $\int_{\rho} \omega = 0$ für beliebige Kurve $\rho: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Aber nach Satzt 2, es reicht zu zeigen, dass ω eine Stammfunktion besitzt.

Für $a := (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, sei $\rho_a: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die Kurve $\rho_a(t) = ta$.

Sei $f(a) := \int_{\rho_a} \omega = \int_0^1 ta_2 e^{ta_3} a_1 + ta_1 e^{ta_3} a_2 + ta_1 ta_2 e^{ta_3} a_3 \, dt =$

$= \int_0^1 2ta_1a_2e^{ta_3} + t^2 a_1a_2a_3e^{ta_3} dt =$

$= 2a_1a_2 \int_0^1 te^{ta_3} dt + a_1a_2a_3 \int_0^1 t^2 e^{ta_3} dt =$

$$= \begin{cases} 2a_1a_2[\frac{te^{ta_3}}{a_3} - \frac{1}{a_3}\frac{e^{ta_3}}{a_3}]_0^1 + a_1a_2a_3[\frac{t^2e^{ta_3}}{a_3} - \frac{2}{a_3}(\frac{te^{ta_3}}{a_3} - \frac{1}{a_3}\frac{e^{ta_3}}{a_3})]_0^1 & \text{Falls } a_3 \neq 0 \\ 2a_1a_2 \int_0^1 tdt & \text{Falls } a_3 = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2a_1a_2[\frac{e^{a_3}}{a_3} - \frac{1}{a_3}\frac{e^{a_3}}{a_3} - (-\frac{1}{a_3}\frac{1}{a_3})] + a_1a_2a_3[\frac{e^{a_3}}{a_3} - \frac{2}{a_3}(\frac{e^{a_3}}{a_3} - \frac{1}{a_3}\frac{e^{a_3}}{a_3}) - \{-\frac{2}{a_3}(-\frac{1}{a_3}\frac{1}{a_3})\}] & \text{Falls } a_3 \neq 0 \\ 2a_1a_2 \int_0^1 tdt & \text{Falls } a_3 = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2a_1a_2e^{a_3}}{a_3} - \frac{2a_1a_2}{a_3}\frac{e^{a_3}}{a_3} + \frac{2a_1a_2}{a_3}\frac{1}{a_3} + \frac{a_1a_2a_3e^{a_3}}{a_3} - \frac{2a_1a_2a_3}{a_3}(\frac{e^{a_3}}{a_3} - \frac{1}{a_3}\frac{e^{a_3}}{a_3}) - \frac{2a_1a_2a_3}{a_3}\frac{1}{a_3}\frac{1}{a_3} & \text{Falls } a_3 \neq 0 \\ a_1a_2 & \text{Falls } a_3 = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2a_1a_2e^{a_3}}{a_3} - \frac{2a_1a_2}{a_3}\frac{e^{a_3}}{a_3} + \frac{2a_1a_2}{a_3}\frac{1}{a_3} + a_1a_2e^{a_3} - 2a_1a_2(\frac{e^{a_3}}{a_3} - \frac{1}{a_3}\frac{e^{a_3}}{a_3}) - 2a_1a_2\frac{1}{a_3}\frac{1}{a_3} & \text{Falls } a_3 \neq 0 \\ a_1a_2 & \text{Falls } a_3 = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2a_1a_2e^{a_3}}{a_3} - \frac{2a_1a_2}{a_3}\frac{e^{a_3}}{a_3} + \frac{2a_1a_2}{a_3}\frac{1}{a_3} + a_1a_2e^{a_3} - \frac{2a_1a_2e^{a_3}}{a_3} + \frac{2a_1a_2}{a_3}\frac{e^{a_3}}{a_3} - 2a_1a_2\frac{1}{a_3}\frac{1}{a_3} & \text{Falls } a_3 \neq 0 \\ a_1a_2 & \text{Falls } a_3 = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2a_1a_2e^{a_3}}{a_3} - \frac{2a_1a_2}{a_3}\frac{e^{a_3}}{a_3} + \frac{2a_1a_2}{a_3}\frac{1}{a_3} + a_1a_2e^{a_3} - \frac{2a_1a_2e^{a_3}}{a_3} + \frac{2a_1a_2}{a_3}\frac{e^{a_3}}{a_3} - 2a_1a_2\frac{1}{a_3}\frac{1}{a_3} & \text{Falls } a_3 \neq 0 \\ a_1a_2 & \text{Falls } a_3 = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a_1a_2e^{a_3} & \text{Falls } a_3 \neq 0 \\ a_1a_2 & \text{Falls } a_3 = 0 \end{cases}.$$

$= a_1a_2e^{a_3}.$

Da $df(x,y,z) = ye^z dx + xe^x dy + xye^z dz = \omega$, dann ist f Stammfunktion von ω.

Aufgabe 13.4.

Nach Satzt von Stokes $\int_{\gamma} d\eta = \int_{\partial\gamma} \eta = \int_{\partial\Omega} \eta.$ $\qquad (\#)$

Aber $d\eta = (\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y})(dx \wedge dy \wedge dz)$ nach Aufgabe 11.4 (von Tutorium 11).

Also

$$\int_\gamma d\eta = \int_\gamma \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}\right)(dx \wedge dy \wedge dz) \underset{\text{nach Definition}}{=} \int_Q \gamma^*\left(\left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}\right)(dx \wedge dy \wedge dz)\right) =$$

$$= \int_Q \gamma^*((\operatorname{div} W)(dx \wedge dy \wedge dz)) \underset{\text{Satzt } 6(c) \text{ der Vorlesung}}{=}$$

$$= \int_Q (\det D\gamma) \cdot ((\operatorname{div} W)(dx \wedge dy \wedge dz)) \circ \gamma) =$$

$$= \int_Q (\det D\gamma) \cdot (((\operatorname{div} W) \circ \gamma)(dx \wedge dy \wedge dz)) =$$

$$= \int_Q (\det D\gamma) \cdot (((\operatorname{div} W) \circ \gamma) d(x, y, z). \qquad (*)$$

Auf der andere Seite, die Funktion $Q \ni (x, y, z) \overset{\det D_\gamma}{\longmapsto} \det D\gamma(x, y, z)$ ist stetig, und da Q kompakt und Zusammenhänhend ist, dann ist $(\det D\gamma)[Q] \subset \mathbb{R}$ kompakt und zusammenhängend auch, d.h., $(\det D\gamma)[Q]$ ist ein abgeschlossenes Interval. Aber γ ist ein dipheomorphismus ist, d.h. $\forall(x, y, z).\det D\gamma(x, y, z) \neq 0$. Nach diesen Bemerkungen folgt dass
$(\det D\gamma)[Q] \subset \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ oder $(\det D\gamma)[Q] \subset \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$ (sonst gäbe es ein $(x_0, y_0, z_0) \in Q$ mit $(\det D\gamma)(x_0, y_0, z_0) = 0$). Deswegen
$(\det D\gamma) = |(\det D\gamma)|$ oder $(\det D\gamma) = -|(\det D\gamma)|$. (**)

Nach (**) wir haben zwei Fälle:

Fall $(\det D\gamma) = |(\det D\gamma)|$.

Dann $\int_Q (\det D\gamma) \cdot ((\operatorname{div} W) \circ \gamma) d(x, y, z) = \int_Q |\det D\gamma| \cdot ((\operatorname{div} W) \circ \gamma) d(x, y, z) =$

$$\underset{\text{Transformationsatz}}{=} \int_\Omega \operatorname{div} W \, d(x, y, z) \qquad (***)$$

Fall $(\det D\gamma) = -|(\det D\gamma)|$.

Dann $\int_Q (\det D\gamma) \cdot ((\operatorname{div} W) \circ \gamma) d(x, y, z) = \int_Q -|\det D\gamma| \cdot ((\operatorname{div} W) \circ \gamma) d(x, y, z) =$

$$= -\int_Q |\det D\gamma| \cdot ((\operatorname{div} W) \circ \gamma) d(x, y, z) \underset{\text{Transformationsatz}}{=} -\int_\Omega \operatorname{div} W \, d(x, y, z) \qquad (****)$$

Letzendlich, nach (#), (*), (***) und (****)

$|\int_\Omega \operatorname{div} W \, d(x, y, z)| = |\int_\gamma d\eta| = |\int_{\partial\Omega} \eta|$.