Wintersemester 2010

H. Donder, A. Fackler, P. Garcia

Analysis III Tutorium

Blatt 13

Aufgabe 13.1.

Seien $fdx + gdy$ eine 1-Form auf eine offene menge U und (γ, Q) eine 2-Fläche mit $\gamma\colon Q \longrightarrow \gamma[Q]$ ein diffeomorphismus. Seien $G := \{\gamma(x, y) | (x, y) \in Q\} = \gamma[Q]$ und $\partial G := \partial\gamma$.

(a) Zeigen Sie, dass $|\int_{\partial G} fdx + gdy| = |\int_G (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}) d(x, y)|$.

(b) Zeigen Sie, dass G integrierbar ist mit $v(G) = \frac{1}{2}|\int_{\partial G} xdy - ydx|$.

Aufgabe 13.2. Sei G die Menge, die die Kurve $\lambda\colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\lambda(\theta) := (2\cos^3\theta, 2\sin^3\theta)$ einschliesst. Mit hilfe von Aufgabe 13.1 berechnen Sie $v(G)$.

Aufgabe 13.3. Sei $\omega := ye^z dx + xe^z dy + xye^z dz$. Zeigen Sie, dass für belibige 2-Fläche (γ, Q), $\gamma\colon Q \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\int_{\partial\gamma} \omega = 0$.

Aufgabe 13.4. Seien $W\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $W = (F, G, H)$ ein differenzierbare vektor Feld und η die 2-Form $\eta = Fdx \wedge dy + Gdy \wedge dz + Hdx \wedge dz$. Sei (γ, Q) eine 3-Fläche, mit $\gamma\colon Q \longrightarrow \gamma[Q] \subset \mathbb{R}^3$, ein diffeomorphismus. Sei $\Omega := \gamma[Q]$ und $\partial\Omega := \partial\gamma$.

Zeigen Sie, dass $|\int_\Omega \operatorname{div} W \, d(x, y, z)| = |\int_{\partial\Omega} \eta|$.