Prof. Dr. H.-D. Donder

Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011

31. Januar 2011

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Lösungsskizze zu Tutorium 12

Aufgabe 1: Die Funktion ist zwar stetig, aber auf U nicht beschränkt. Setze daher $U_n = \{(x,y) \mid \frac{1}{n} < x^2 + y^2 < 2\}$ für $n \geq 1$ und berechne zunächst:

$$\begin{aligned}
\int_{U_n} \ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^{2\pi}\int_{1/n}^{\sqrt{2}} \ln(r^2) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t = 2\pi \int_{1/n}^{\sqrt{2}} r\ln(r^2)\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\left(\frac{r^2}{2}\cdot\ln(r^2)\Big|_{1/n}^{\sqrt{2}} - \int_{1/n}^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{2}\cdot\frac{2r}{r^2}\,\mathrm{d}r\right) \\
&= 2\pi\ln 2 - \pi\frac{\ln\frac{1}{n^2}}{n^2} - 2\pi\int_{1/n}^{\sqrt{2}} r\,\mathrm{d}r = 2\pi\ln 2 - 2\pi + \pi\frac{\ln(n^2)}{n^2} + \frac{\pi}{n^2}
\end{aligned}$$

Dies konvergiert gegen $2\pi(\ln 2 - 1)$ für $n \to \infty$. Nach dem Satz von Levi ist dies dann auch der Wert des Integrals auf U, denn die Folge der Funktionen $\ln(x^2+y^2)\mathbf{1}_{U_n}$ is monoton fallend und konvergiert punktweise gegen $\ln(x^2+y^2)\mathbf{1}_U$.

Aufgabe 2: **(a)** Wir nehmen wieder an, dass es eine Stammfunktion F gibt mit $F(0,0,0) = 0$. Dann ergibt sich der Wert $F(x,y,z)$ durch Integration entlang der Strecke von $(0,0,0)$ bis (x,y,z):

$$\begin{aligned}
F(x,y,z) &= \int_{\gamma_{x,y,z}} 3u^2v^3w\,\mathrm{d}u + (3u^3v^2w+1)\,\mathrm{d}v + (u^3v^3+1)\,\mathrm{d}w \\
&= \int_0^1 \left(3x^2y^3zt^6x + (3x^3y^2zt^6+1)y + (x^3y^3t^6+1)z\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(7x^3y^3zt^6 + y + z\right)\,\mathrm{d}t = x^3y^3zt^7 + yt + zt\Big|_0^1 = x^3y^3z + y + z
\end{aligned}$$

Durch Berechnen der äußeren Ableitung verifizieren wir, dass F tatsächlich eine Stammfunktion ist:

$$\mathrm{d}F = 3x^2y^3z\,\mathrm{d}x + (3x^3y^2z+1)\,\mathrm{d}y + (x^3y^3+1)\,\mathrm{d}z$$

(b) Diese 1-Form ist nicht geschlossen und hat daher keine Stammfunktion:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}e^{xy} = xe^{xy} \neq e^{x+y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{x+y}$$

Aufgabe 3: Wäre $\omega = \mathrm{d}\eta$, so wäre $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\,\mathrm{d}\eta = 0$, aber es ist:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}(xyz) \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}(x^2) \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\
&= (yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z) \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + 2x\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\
&= xy\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + 2x\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = (2x + xy)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: $\varphi^*(\omega)$ ist eine 1-Form auf $\mathbb{R}$, da φ eine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^2$ ist. $\varphi^*(\omega)(t)$ ist also an jeder Stelle $t \in \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Wir bestimmen diese Abbildung, indem wir für ein $s \in \mathbb{R}$ das Bild $\varphi^*(\omega)(t)(s)$ von s bestimmen.

Nach der Definition ist für alle $s, t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi^*(\omega)(t)(s) = \omega(\varphi(t))(\mathrm{D}\varphi(t)s) = (e^{-|t|}\lambda_2)((1, 2t)s) = 2te^{-|t|}s$$

Also ist die lineare Abbildung $\varphi^*(\omega)(t)$ durch die Multiplikation mit $2te^{-|t|}$ gegeben. Da $\lambda_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Identität ist, lässt sich das auch als $\varphi^*(\omega)(t) = 2te^{-|t|}\lambda_1$ ausdrücken. Diejenige 1-Form, die an jeder Stelle λ_1 ist, bezeichnen wir wie üblich mit $\mathrm{d}t$. Mit dieser Schreibweise ist also $\varphi^*(\omega) = 2te^{-|t|}\,\mathrm{d}t$.