Prof. Dr. H.-D. Donder
Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011
18. Januar 2011

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Lösungsskizze zu Tutorium 10

Aufgabe 1:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \omega &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1^2(t)+\gamma_2^2(t)}\gamma_1'(t) + \frac{\gamma_1(t)}{\gamma_1^2(t)+\gamma_2^2(t)}\gamma_2'(t) \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{-r\sin(t)}{r^2\cos^2(t)+r^2\sin^2(t)} r\sin(t) + \frac{r\cos(t)}{r^2\cos^2(t)+r^2\sin^2(t)} r\cos(t) \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin^2(t)+\cos^2(t))\,\mathrm{d}t = 2\pi
\end{aligned}$$

Aufgabe 2:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f(x)(f'(x)) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\lambda_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\lambda_n \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)^2 = \|f'\|^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Falls die 1-Form eine Stammfunktion F besitzt, so muss für F gelten:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{\gamma_x} f\,\mathrm{d}f = \int_0^1 f(\gamma_x(t))\,\mathrm{d}f(\gamma_x(t))\gamma_x'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}f(xt)x\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n f(xt)\frac{\partial f}{\partial x_k}(xt)x_k \right) \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{f^2(xt)}{2} \right) \mathrm{d}t = \frac{f^2(x)}{2}
\end{aligned}$$

Tatsächlich ist:

$$\mathrm{d}F(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{f^2(x)}{2}\,\mathrm{d}x_k = \sum_{k=1}^n f(x)\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\,\mathrm{d}x_k = f(x)\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\,\mathrm{d}x_k = f(x)\,\mathrm{d}f(x)$$

Aufgabe 4: Wieder nehmen wir zunächst an, es gebe eine Stammfunktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, und berechnen ihren Wert in (x, y), indem wir von $(0, 0)$ nach (x, y) integrieren. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $F(0, 0) = 0$ annehmen. Der Einfachheit halber integrieren wir nicht auf geradem Wege, sondern erst entlang der x-Achse und dann parallel zur y-Achse, also entlang den Wegen $\gamma_x : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \gamma_x(t) = (xt, 0)$ und $\delta_{x,y} : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \delta_{x,y}(t) = (x, yt)$:

$$\begin{aligned}
F(x,0) &= \int_{\gamma_{x,0}} (\sin(uv) + uv\cos(uv))\,\mathrm{d}u + u^2\cos(uv)\,\mathrm{d}v = \int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0 \\
F(x,y) &= F(0,0) + \int_{\gamma_x} \omega + \int_{\delta_{x,y}} \omega \\
&= 0 + \int_0^1 0\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \big((\sin(xyt) + xyt\cos(xyt))0 + x^2\cos(xyt)y\big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 x^2 y\cos(xyt)\,\mathrm{d}t = x\sin(xyt)|_0^1 = x\sin(xy)
\end{aligned}$$

Tatsächlich ist dies eine Stammfunktion von ω, denn $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \sin(xy) + xy\cos(xy)$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x^2\cos(xy)$.