Wintersemester 2010/2011

H. Donder, A. Fackler, P. Garcia

Analysis III Tutorium

Blatt 1

Aufgabe 1.1. Seien A_1, A_2, B_1, B_2 nicht leere Mengen. Dann

a. $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = [(A_1 \backslash A_2) \times B_1] \cup [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cup B_2)] \cup [(A_2 \backslash A_1) \times B_2]$

b. Die Mengen $[(A_1 \backslash A_2) \times B_1], [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cup B_2)], [(A_2 \backslash A_1) \times B_2]$ sind paarweise disjunkte.

Aufgabe 1.2.

Seien A_1, A_2, B_1, B_2 nicht leere Mengen. Dann

a. $(A_1 \times B_1) \backslash (A_2 \times B_2) = [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \backslash B_2)] \cup [(A_1 \backslash A_2) \times B_1)]$

b. $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)]$

Aufgabe 1.3.

a) Sei $\| \|_1$ die L^1-Halbnorm. Zeigen Sie, dass es $g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $g \neq 0$ existiert, so dass $\|g\|_1 = 0$.

b) Sei $C[0,1] := \{f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} | f \text{ ist stetig}\}$. Sei $N_0\colon C[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $N_0(f) := |f(0)|$. Zeigen Sie, dass N_0 ein Halbnorm in $C[0,1]$ ist.

Aufgabe 1.4. Seien $I := \{f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid |f| \text{ integrierbar}\}$ und $C[0,1] := \{f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} | f \text{ ist stetig}\}$. Sei $N_1\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, $N_1(f) := \int_0^1 |f| dx$.

a. Zeigen Sie, dass N_1 ein Halbnorm in $C[0,1]$ ist.

Sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leqslant x \leqslant (1 - \frac{1}{n})\frac{1}{2} \\ 2nx - 2n(1 - \frac{1}{n})\frac{1}{2} & \text{falls } (1 - \frac{1}{n})\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{falls } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$.

Sei $F\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leqslant x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{falls } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$.

b. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n \geqslant 1}$ eine Cauchy Folge in $C[0,1]$ (bezüglich N_1) ist.

c. Zeigen Sie, dass (bezüglich N_1) $(f_n)_{n \geqslant 1}$ konvergiert nach $F \notin C[0,1]$.